

André Vital Saúde

Esqueletos Euclidianos Discretos em Resolução Aumentada

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Tese em co-tutela com a Universidade de Marne-la-Vallée, França. Área de concentração: **Engenharia de Computação**.

Orientadores:

Roberto de Alencar Lotufo, Unicamp
Michel Couprie, UMLV

Campinas/SP
2006

FICHA CATALOGRÁICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA
BAE - UNICAMP

Sa85e Saúde, André Vital
Esqueletos euclidianos discretos em resolução aumentada.
/ André Vital Saúde. – Campinas, SP: [s.n.], 2003.

Orientadores: Roberto de Alencar Lotufo, Michel Couprie.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Morfologia matemática. 2. Geometria discreta. 3. Geometria e topologia. 4. Reconhecimento de padrões. 5. Processamento de imagens. I. Lotufo, Roberto de Alencar. II. Couprie, Michel. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Discrete Euclidean skeletons in increased resolution.

Palavras-chave em Inglês: Euclidean skeletons, Homotopic skeletons, Medial axis, Homotopic thinning, Mathematical morphology.

Área de concentração: Engenharia de Computação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora: Clésio Luiz Tozzi, Gerald Jean Francis Banon, Shin Ting Wu, Ulisses de M. Braga Neto

Data da defesa: 15/12/2006

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

André Vital Saúde

Esqueletos Euclidianos Discretos em Resolução Aumentada

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Engenharia de Computação**.

Aprovação em 15/12/2006

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Clésio Luiz Tozzi	FEEC/UNICAMP/Brasil	(examinador)
Prof. Dr. Gerald Jean Francis Banon	INPE/Brasil	(examinador)
Prof. Dr. Michel Couprie	IGM/ESIEE/França	(orientador)
Prof. Dr. Roberto de Alencar Lotufo	FEEC/UNICAMP/Brasil	(presidente/orientador)
Prof. Dr. Shin Ting Wu	FEEC/UNICAMP/Brasil	(examinadora)
Prof. Dr. Ulisses de M. Braga Neto	CPQAM/FIOCRUZ/Brasil	(examinador)

Campinas/SP
2006

Resumo

A extração de esqueletos Euclidianos é uma tema de grande importância na área de processamento de imagens e tem sido discutido pela comunidade científica já há mais de 20 anos. Hoje é consenso que os esqueletos Euclidianos devem ter as seguintes características: finos, centrados, homotópicos e reversíveis, *i.e.*, suficientes para a reconstrução do objeto original. Neste trabalho, introduzimos o Eixo Mediano Euclidiano Exato em Resolução Aumentada - HMA, com o objetivo de obter um eixo mediano mais fino do que o obtido pela definição clássica. Combinando o HMA com um eficiente algoritmo de afinamento paralelo homotópico, propomos um esqueleto Euclidiano que é centrado, homotópico, reversível e mais fino que os já existentes na literatura. O esqueleto proposto tem a particularidade adicional de ser único e independente de decisões arbitrárias. São dados algoritmos e provas, assim como exemplos de aplicações dos esqueletos propostos em imagens reais, mostrando as vantagens da proposta. O texto inclui também uma revisão bibliográfica sobre algoritmos de transformada de distância, eixo mediano e esqueletos homotópicos.

Palavras-chave: esqueletos Euclidianos, esqueletos homotópicos, eixo mediano, afinamento homotópico, morfologia matemática.

Abstract

The extraction of Euclidean skeletons is a subject of great importance in the domain of image processing and it has been discussed by the scientific community since more than 20 years. Today it is a consensus that Euclidean skeletons should present the following characteristics: thin, centered, homotopic and reversible, *i.e.*, sufficient for the reconstruction of the original object. In this work, we introduce the Exact Euclidean Medial Axis in Higher Resolution - HMA, with the objective of obtaining a medial axis which is thinner than the one obtained by the classical medial axis definition. By combining the HMA with an efficient parallel homotopic thinning algorithm we propose an Euclidean skeleton which is centered, homotopic, reversible and thinner than the existing similars in the literature. The proposed skeleton has the additional particularity of being unique and independent of arbitrary choices. Algorithms and proofs are given, as well as applicative examples of the proposed skeletons in real images, showing the advantages of the proposal. The text also includes an overview on algorithms for the Euclidean distance transform algorithms, the medial axis extraction, as well as homotopic skeletons.

Keywords: Euclidean skeletons, homotopic skeletons, medial axis, homotopic thinning, mathematical morphology.

Résumé

L'extraction de squelettes Euclidiens est un thème de grande importance dans le domaine du traitement d'images, qui a été discuté par la communauté scientifique depuis plus de 20 ans. Aujourd'hui, un consensus dit que les squelettes Euclidiens devraient avoir les caractéristiques suivantes: minces, centrés, homotopiques et réversibles, *i.e.*, suffisants pour la reconstruction de l'objet d'origine. Dans ce travail, on introduit l'Axe Médian Euclidien Exact en Résolution Augmentée - HMA, dans l'objectif d'obtenir un axe médian plus mince que celui obtenu par la définition classique. Par une combinaison du HMA et d'un algorithme efficace d'amincissement homotopique parallèle, nous proposons un squelette Euclidien centré, homotopique, réversible et plus mince que les squelettes existant dans la littérature. Le squelette que nous proposons a la particularité additionnelle d'être unique et indépendant de décisions arbitraires. Nous donnons des algorithmes et des preuves, aussi bien que des exemples applicatifs des squelettes proposés sur des images réelles, en montrant les avantages de notre approche. Le texte inclut aussi un état de l'art sur les algorithmes de transformée de distance, axe médian et squelettes homotopiques.

Mots-clés: squelettes Euclidiens, squelettes homotopiques, axe médian, amincissement homotopique, morphologie mathématique.

Agradecimentos

Primeiramente, eu gostaria de agradecer as três instituições de fomento à pesquisa que financiaram esta tese. O suporte destas instituições é muito importante para o desenvolvimento científico brasileiro e francês. São elas a Fapesp, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, Brasil, a Capes, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Brasil e o CNRS, Centro Nacional de Pesquisa Científica, França.

Devo muito reconhecimento ao trabalho de meus dois orientadores, o Prof. Dr. Roberto de Alencar Lotufo, da Unicamp, e o Prof. Dr. Michel Couprie, da Esiee. São dois pesquisadores sérios e responsáveis, que souberam transmitir-me conhecimento. Pretendo manter e estender ainda mais nossas relações profissionais.

Aos meus colegas do LCA, companheiros de antes e de depois de minha empreitada na França. Obrigado pelas contribuições no meu trabalho e, obviamente, pelos momentos de risos no cafezinho.

Aos colegas do Laboratório de Neuroimagem da Unicamp, com quem estou interagindo há alguns anos. Em especial, um agradecimento a Clarissa Yasuda, que mais vem me incentivando para o meu trabalho com imagens médicas. Espero frutíferas colaborações com vocês no futuro.

Aos colegas do laboratório A²SI, na Esiee, estudantes e formadores que sempre estiveram muito próximos, dentre eles, Jean Cousty, David Menotti, Xavier Darragon, Yukiko Kenmochi, Jean Serra, Gilles Bertrand, Laurent Najman, Denis Bureau e Hugues Talbot.

Não poderia deixar de agradecer aos novos colegas de trabalho, da UFLA, que me receberam com muito entusiasmo, forneceram toda a ajuda possível para as disciplinas que assumi, e foram tolerantes com as dificuldades que tive nos últimos meses de doutorado.

Ao mundo extra-classe, os amigos de música, escalada e cerveja. Aos estudantes Erasmus de Paris, os Polyglots, os antigos amigos de Grenoble, e todos os outros franceses que me provocaram lágrimas em meu retorno ao Brasil. Aos amigos brasileiros que perdoaram minha ausência temporária e nunca deixaram de ser o que eram.

À minha família. Papai, Mamãe, Mano Velho e Mana Velha. Avó, tios e primos. Além dos novos integrantes, Cunhado e Cunhada, que chegaram para trazer alegria ao nosso lar.

À família Victório, que me acolhe sempre bem. Em especial, à minha querida e amada Sheila, que além da maravilhosa companheira que é, compartilhou comigo os seus e os meus momentos de tensão, calma e aprendizado em nossos trabalhos. A ela dedico esta tese como reconhecimento pelo seu incentivo e como incentivo para o sucesso na sua própria tese.

Enfim, como não poderia faltar, agradeço aos meus instrumentos musicais, que na ausência de todos a quem agradeço acima, felizmente puderam estar sempre perto para me confortar.

A Sheila

Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xxi
1 Introdução	1
2 Transformadas de Distância	5
2.1 Transformadas de distância em diferentes métricas	7
2.2 Algoritmo de Hirata	10
2.3 Transformada de distância unificada e separável a sementes	13
3 Eixo Mediano e Esqueletos Homotópicos	17
3.1 O conceito de eixo mediano	17
3.2 Homotopia: uma introdução informal	19
3.3 Eixo mediano discreto	21
3.4 Esqueletos discretos	22
3.5 Algoritmos existentes	25
3.5.1 Eixo mediano	25
3.5.2 Esqueletos homotópicos	27
3.6 Núcleos críticos	27
3.7 Breve observação conclusiva	35
4 Discrete 2D and 3D Euclidean Medial Axis in Higher Resolution	37
4.1 Introduction	38
4.2 Basic notions	40
4.3 Euclidean medial axis in higher resolution	42
4.3.1 An important proposition	44
4.3.2 E_n -balls and higher resolution medial axis	46

4.4	Algorithm to compute the HMA	48
4.4.1	Algorithm for the medial axis (Rémy e Thiel)	49
4.4.2	Algorithm to extract the HMA	50
4.5	Results	55
4.6	Conclusion and perspectives	58
4.7	Building the look-up tables	58
4.8	Proof of Proposition 4	60
5	Euclidean Homotopic Skeleton in 2D and 3D Based on Critical Kernels	63
5.1	Complexes	66
5.2	Critical kernels	68
5.3	A bijection between \mathbb{F}^n and \mathbb{Z}^n	71
5.4	A first approach for an Euclidean medial axis in \mathbb{F}^n	72
5.5	A thinner Euclidean medial axis	73
5.6	Guided homotopic thinning algorithms	78
5.7	Geometrical distortion of the skeleton	80
5.8	New Euclidean homotopic skeleton algorithm	81
6	Conclusão	89
6.1	Trabalhos futuros	90
6.2	Agradecimentos	92
	Bibliografia	93

Lista de Figuras

2.1	Ilustração do envelope inferior	10
2.2	Transformada de distância a sementes	13
2.3	Transformada de distância a sementes: exemplo	14
3.1	Ilustração do eixo mediano com a abordagem de fogo de pradaria	18
3.2	Ilustração do eixo mediano pela abordagem de discos máximos	18
3.3	Pontos simples na 4-adjacência	20
3.4	Pontos simples em 8-adjacência	21
3.5	Eixo mediano discreto: homotopia e finura são perdidos	22
3.6	Afinamento homotópico e pontos simples	23
3.7	Um esqueleto completamente fino não pode ser obtido	24
3.8	Esqueletos Euclidianos homotópicos	25
3.9	Sensibilidade à rotação, em métricas discretas	26
3.10	O conceito de faces	28
3.11	Faces numa representação gráfica	28
3.12	O fechamento de uma face e o fechamento de um conjunto finito das faces	29
3.13	A borda de uma célula	29
3.14	Ilustração de um complexo	30
3.15	Faces principais	30
3.16	Complexos puros	31
3.17	Mapeamento de uma imagem 2D binária em um 2-complexo cú- bico puro	31
3.18	Faces de borda, dois pares livres e faces livres	32
3.19	Uma seqüência de contração com dois passos	32
3.20	As 0- e 1-faces essenciais estão demarcadas	32
3.21	O núcleo de uma célula	33
3.22	Uma seqüência de extrações de núcleos críticos	34

4.1	Thick medial axis	38
4.2	The medial axis in the doubled resolution grid	39
4.3	H -transform in \mathbb{Z}^2	44
4.4	E_n -tight: a counter-example	45
4.5	Illustration for the proof of Proposition 4 in 2D	45
4.6	E_n -balls in \mathbb{Z}^2	47
4.7	Illustration of the EnRmin function	52
4.8	2D HMA examples	55
4.9	3D HMA examples	56
4.10	Evaluation of EnRmin	57
4.11	Illustration for the proof of Proposition 4 in 3D	60
5.1	Skeleton obtained by the parallel algorithm AK^2 (Bertrand e Cou- prie, 2006b), this skeleton contains the (4-distance) medial axis of the shape.	66
5.2	(a): Four points x, y, z, t of \mathbb{Z}^2 such that $\{x, y, z, t\}$ is a 2-face. (b,c): Two representations of the set of faces $\{\{x, y, z, t\}, \{x, y\}, \{z\}\}$. (d): A set X of faces in \mathbb{F}^2 , we see that X is not a complex. (e): The set X^+ , composed by the facets of X . (f): The set X^- , <i>i.e.</i> the closure of X , which is a complex. .	67
5.3	(a) A complex X , (b), (c), and (d) three steps of elementary col- lapse of X	68
5.4	(a): A complex X for the illustration of the notions of essential face, core and critical face (see text). (b): The critical kernel $\text{Critic}(X)\emptyset$. (c): The constrained critical kernel $\text{Critic}(X)K$, with $K = \{v\}$	69
5.5	(a): A complex X and its critical faces (highlighted). (b): The crit- ical kernel $X_1 = \text{Critic}(X)\emptyset$. (c): $X_2 = \text{Critic}(X_1)\emptyset$. (d): $X_3 =$ $\text{Critic}(X_2)\emptyset = \text{Critic}(X_3)\emptyset$	70
5.6	(a): A set of faces K_1 . (b): The constrained critical kernel $\text{Critic}(X)K_1$. (c): A set of faces K_2 . (d): The constrained crit- ical kernel $\text{Critic}(X)K_2$	70
5.7	Illustration of the bijection Ψ^{-1} between \mathbb{Z}^2 and \mathbb{F}^2	71
5.8	A complex X (in white), and the minimal skeleton of X con- strained by its medial axis (highlighted).	73
5.9	A complex X (in white), and the Euclidean medial axis of $\Psi(X)$ (highlighted).	74
5.10	Illustration of G_2 -balls and G_2 -maximal balls (see text).	75

5.11	(a): The Euclidean H-medial axis of X (highlighted). (b): The complex which is the closure of the Euclidean H-medial axis of X (highlighted).	77
5.12	Result of algorithm EHSb (or EHSa).	80
5.13	(a): Zoom on a part of Figure 5.12. (b): Zoom on a part of Figure 5.8.	81
5.14	Illustration of a geometrical distortion of the skeleton. (a): A part of an object X (in gray), skeleton points found by a thinning algorithm guided only by the distance map (circles), path of steepest slope w.r.t. the distance map (squares). (b): A step in the thinning process (see text). The numbers are the distance map values. . . .	82
5.15	(a): Zoom on a part of a skeleton obtained by algorithm EHSb (the skeleton is in gray, and the H-medial axis is in black). (b): Zoom on a part of a skeleton obtained by algorithm EuclideanHomotopicSkeleton. (c): Variant of EuclideanHomotopicSkeleton, see text.	84
5.16	A configuration used to explain the definition of Γ	84
5.17	Skeleton obtained by algorithm EHSb. Notice the detail encircled by a dashed line, a branch of the skeleton does not correspond to any noticeable contour saliency.	85
5.18	Skeleton obtained by algorithm EuclideanHomotopicSkeleton. Notice the difference in the encircled region.	86
5.19	Skeletons of a thick spiral. Up: result of the parallel thinning algorithm CK^3 (see (Bertrand e Couprie, 2006c)). Down: Euclidean homotopic skeleton.	87
6.1	Um HMA espesso	90

Lista de Tabelas

4.1	Illustration of some n -decompositions.	41
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Esqueletos possuem um papel importante no processamento de imagem. Têm sido usados por diversas aplicações para o reconhecimento de padrões, descrição e análise de formas, e representação de objetos. O uso dos esqueletos em imagens digitais tornou-se popular quando Blum (1961) introduziu a noção de eixo mediano. Ele definiu o eixo mediano de um objeto como o conjunto dos centros dos discos máximos do objeto, onde os discos máximos são os discos inclusos no objeto e não estritamente inclusos em qualquer outro disco, também no objeto. Esta definição de esqueleto apresenta boas propriedades no plano contínuo, quando se tratam de discos Euclidianos. O eixo mediano é *centrado*, com relação à distância Euclidiana, já que os centros de discos máximos são naturalmente centrados no objeto. É *fino*, sem pontos interiores, e é também *homotópico*, isto é, tem a mesma topologia do objeto que representa. Um objeto é equivalente à união de todos os discos máximos nele inclusos, e por isso, o eixo mediano é também *reversível*, *i.e.*, suficiente para a reconstrução exata do objeto original, se os raios dos discos forem armazenados.

A formulação discreta do eixo mediano de Blum não mantém as mesmas propriedades que sua contrapartida contínua. Independente da métrica usada (métrica Euclidiana ou discreta), o simples fato de os discos estarem centrados nos pontos de uma grade implicam um eixo mediano espesso. Além disso, a propriedade de homotopia é também perdida. Somente as características “centrado” e “reversível” permanecem.

Por estas razões, muito trabalhos de pesquisa foram dedicados ao estudo do eixo mediano discreto, com uma larga variabilidade de objetivos. Dependendo da aplicação, uma ou algumas das propriedades acima são mais importantes. Às vezes nenhuma delas é importante, mas apenas o tempo de computação do es-

queleto. Uma vasta literatura neste assunto está disponível, com alguns artigos que se concentram na espessura, outros que se concentram na homotopia ou em algoritmos eficientes.

A eixo mediano discreto está fortemente relacionado às *transformadas de distância*, que associam a cada ponto no objeto sua distância ao complementar, de acordo com a métrica de distância usada. Os raios dos discos máximos são dados diretamente pela transformada de distância e, logo, a maioria de algoritmos para a extração do eixo mediano se iniciam por computá-la. Como será apresentado no Capítulo 2, os primeiros algoritmos eficientes para a transformada de distância (e conseqüentemente para o eixo mediano) apareceram para as métricas discretas.

O uso de métricas discretas pode ser suficiente para uma quantidade grande de problemas, mas seu inconveniente principal é que os discos em métricas discretas não são invariantes a rotação, e o eixo mediano de um objeto pode ser extremamente diferente do eixo mediano do mesmo objeto girado, por exemplo, de 45 graus. Isto motiva o uso da métrica Euclidiana. Outrossim, está constatado que os algoritmos mais atuais para a transformada de distância Euclidiana e para o eixo mediano Euclidiano discreto são muito eficientes, o que motiva ainda mais os esqueletos Euclidianos.

Para esta tese, buscamos agrupar todas as propriedades do eixo mediano contínuo num único esqueleto discreto, com uma definição original. Primeiramente, devemos observar que esqueletos centrados e homotópicos podem ser obtidos por um afinamento homotópico do objeto, guiado por uma função de prioridade que é a distância Euclidiana ao complementar. Se o processo de afinamento for impedido de suprimir pontos do eixo mediano, o esqueleto resultante é também suficiente para a reconstrução do objeto (reversível). Porém, o esqueleto continua sendo espesso.

A abordagem que consideramos para a obtenção de esqueletos mais finos foi o aumento da resolução do objeto, uma idéia que já havia sido explorada para as métricas discretas (de Souza, 2005). Definimos o *Eixo Mediano Euclidiano em Resolução Aumentada* (HMA) (Saúde et al., 2007), fornecendo e provando um algoritmo eficiente para computá-lo, baseado na transformada de distância Euclidiana. Apesar da definição do HMA poder ser estendida a um aumento de resolução em maior escala, nós fornecemos somente um algoritmo para a grade em resolução duplicada, e tal escolha tem uma razão importante. A grade em resolução duplicada é também a usual representação em inteiros da grade proposta por Khalimsky et al. (1990).

Em trabalhos recentes, Bertrand e Couprie (2006a) propuseram algoritmos eficientes para o afinamento homotópico paralelo no domínio de Khalimsky. Como

esses algoritmos não consideram nenhuma função de prioridade para o processo de afinamento, eles são naturalmente guiados pela vizinhança, tendo por resultado esqueletos baseados nas métricas discretas de vizinhos 4 e 8. Com a introdução de uma função guiando tais algoritmos e a utilização do HMA como conjunto de restrição para o afinamento, obtivemos o esqueleto homotópico Euclidiano em resolução aumentada (Couprie et al., 2007), que é mais fino do que os esqueletos homotópicos Euclidianos que utilizam o eixo mediano discreto clássico como conjunto restritivo. De nosso conhecimento, esta definição não possui equivalente na literatura.

O conteúdo deste manuscrito é a descrição do HMA e do esqueleto Euclidiano homotópico em resolução aumentada. São dados algoritmos e provas, assim como exemplos de aplicações dos esqueletos propostos em algumas imagens reais.

Esta tese foi preparada em duas instituições, enquanto parte do programa de *co-tutelle*, onde cada instituição confere independentemente o grau de doutor a um único estudante. Devido às diferentes exigências de cada instituição quanto ao formato, esta tese está disponível em duas versões. Esta versão, em português, para ser registrada na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), e uma segunda versão, em inglês, para ser registrada na Universidade de Marne-la-Vallée (Université de Marne-la-Vallée - UMLV). Adotamos o sistema de inclusão de textos completos de artigos publicados, que se transforma uma prática comum em ambas as instituições e reduz discrepâncias entre as duas versões. Melhores explicações sobre cada ponto importante aparecerão ao longo do texto.

Estas considerações feitas, descrevemos sucintamente a organização deste manuscrito. Nos Capítulos 2 e 3, fazemos uma revisão de trabalhos relacionados com transformadas de distância e eixos medianos, respectivamente. No Capítulo 4 incluímos o texto completo do artigo que apresenta o HMA e o texto completo do artigo que apresenta o esqueleto homotópico Euclidiano é incluído no Capítulo 5. Finalmente, discutimos e concluímos esta tese no Capítulo 6, enquanto propomos trabalhos futuros.

Capítulo 2

Transformadas de Distância

Transformadas de distância (TDs) são uma ferramenta importante para o processamento de imagens. Têm sido usadas extensivamente em diversos domínios relacionados, tais como a geometria computacional, computação gráfica, reconhecimento de padrões e processamento morfológico de imagens. É também a base da grande maioria dos algoritmos para a computação do eixo mediano discreto, como discutiremos em capítulos posteriores.

O conceito das TDs em imagens digitais tornou-se popular em 1966 graças a Rosenfeld e Pfaltz (1966). Eles propuseram algoritmos para calcular TDs usando distâncias nas métricas 4- e 8-vizinhos. O inconveniente das métricas 4- e 8-vizinhos é que estas conduzem a valores de TDs que são forte e arbitrariamente diferentes dos valores da distância Euclidiana. A distância Euclidiana é invariante à rotação e é frequentemente desejável.

Algoritmos computacionalmente eficientes para calcular a TD Euclidiana permaneceram desconhecidos por longo tempo, aparecendo apenas na década de 90. Isto motivou grandes esforços afim de obter finas aproximações. Algumas aproximações importantes são a distância de Chamfer (Borgefors, 1984, 1986; Thiel e Montanvert, 1992) e a distância octogonal (Yokoi et al., 1981). Danielsson (1980) e Ragnelmalm (1990) também propuseram boas aproximações. Entretanto, para algumas aplicações, a distância Euclidiana exata é requerida. Na morfologia matemática, por exemplo, algoritmos rápidos para as operações de dilatação e erosão podem ser obtidos baseados em TDs, e uma TD inexata gera resultados incorretos (Cuisenaire e Macq, 1999).

Diferentes abordagens foram, portanto, exploradas para a computação da TD Euclidiana exata e diversos algoritmos eficientes finalmente apareceram. Baseado em Cuisenaire (1999), que apresenta uma boa revisão dos algoritmos de TD, duas

classes de algoritmos podem ser implementadas eficientemente em computadores de uso geral: algoritmos de propagação e algoritmos de varredura por linhas. De fato, algoritmos de varredura por linhas também propagam informações, mas com a particularidade de propagar somente ao longo de um único eixo de cada vez. Versões paralelas (não de uso geral) dos algoritmos de TD foram propostos por Yamada (1984) e Huang e Mitchell (1994).

O primeiro algoritmo de propagação para a transformada de distância Euclidiana reportado foi o de Montanari (1968), mas seu resultado não é exato. Certamente, a exatidão é ainda um desafio para os algoritmos de propagação. Variações de dois algoritmos conhecidos (Cuisenaire e Macq, 1999) só podem ser exatos se deixarem de ser lineares ou só podem ser lineares se deixarem de ser exatos. Nunca são ao mesmo tempo exatos e lineares. Um outro importante algoritmo de propagação exato e eficiente proposto recentemente é o algoritmo de Eggers (1998). O trabalho recente de Falcão et al. (2004) propõe um algoritmo linear no tempo, porém inexato. Além das dificuldades de se obter exatidão, a paralelização de algoritmos de propagação é também muito difícil.

Os algoritmos de varredura por linhas são bem adaptados para computadores de uso geral e os mais eficientes deles são também paralelizáveis. O ponto principal é que o cálculo pode ser efetuado por varreduras independentes, *i.e.*, uma imagem n -dimensional é processada, dimensão por dimensão, com varreduras unidimensionais. Chamamos esta classe de algoritmos os algoritmos *separáveis*. Tal abordagem já havia sido sugerida desde Rosenfeld e Pfaltz (1966).

Breu et al. (1995) propôs um algoritmo linear separável, baseado em interseções do diagrama de Voronoi¹, e uma melhoria deste método foi proposta recentemente por Maurer et al. (2003). Lotufo e Zampiroli (2001) também propõem um algoritmo eficiente, baseado em operadores de morfologia matemática.

Não obstante, os métodos separáveis mais simples (e ainda eficientes) em nosso ponto de vista são os métodos baseados nas interseções de parábolas, propostas primeiramente por Kolountzakis e Kutulakos (1992). Em 1994, Saito e Toriwaki (1994a) também propuseram um método baseado na mesma idéia, fornecendo um algoritmo mais eficiente. Explorando uma propriedade adicional, detalhada mais tarde nestes capítulo, o algoritmo de Saito e Toriwaki pode ser melhorado, e o custo computacional atinge o ótimo. Hirata (1996) e Meijster et al. (2000) descobriram independentemente tal propriedade e apresentaram um algoritmo separável e ótimo, que além disso unifica a computação de TDs em di-

¹Um bom estudo sobre os diagramas de Voronoi pode ser encontrado em (Aurenhammer, 1991).

versas métricas diferentes. Partindo de (Hirata, 1996) e (Meijster et al., 2000), Cœurjolly (2003) derivou algoritmos para computar transformada de distância inversa, e para extrair em tempo linear um eixo mediano Euclidiano discreto que apesar de não exato possui boas propriedades.

Neste trabalho usamos o algoritmo de Hirata (Hirata, 1996) para a computação da TD Euclidiana, que é a base para a extração do *Eixo Mediano Euclidiano em Resolução Aumentada* (HMA) (ver Capítulos 3 e 4). Estudamos também em detalhes os algoritmos apresentados por Cœurjolly (2003); Hirata (1996); Meijster et al. (2000), considerando a possibilidade de derivar deles um algoritmo ótimo no tempo para o HMA. Nas seções a seguir, damos a informação necessária sobre estes algoritmos e mostramos precisamente como o algoritmo de Hirata pode ser usado para a computação da TD de um objeto a um conjunto arbitrário.

2.1 Transformadas de distância em diferentes métricas

Nesta seção apresentamos uma definição formal de TD e a idéia principal do algoritmo de Saito e Toriwaki para a distância Euclidiana, que é a base para os algoritmos mais gerais e mais eficientes. Vamos dar uma definição de TD, válida para qualquer métrica.

Definição 1 (TD) *Seja $X \subset \mathbb{Z}^n$ e M uma métrica, a transformada de distância do objeto X , com respeito à métrica M , denotada por TD_X^M , associa a cada ponto $p \in X$ sua distância ao mais próximo ponto q em \bar{X} , com respeito à métrica M :*

$$TD_X^M(p) = \min\{D^M(p, q), q \in \bar{X}\} \quad (2.1)$$

onde $D^M(p, q)$ é a distância do ponto p ao ponto q com respeito à métrica M .

Para ilustrar, vejamos as equações $D^M(p, q)$ para algumas métricas. Expomos abaixo as equações para a distância Euclidiana (ao quadrado) exata, a distância *city-block*, e a distância *chessboard*. A distância *city-block* é chamada às vezes de distância de *manhattan*, e é um nome genérico (válido para n dimensões) para as distâncias baseadas nas métricas 4-vizinhos, em 2D, e 6-vizinhos, em 3D. Similarmente, a distância de *chessboard* é um nome genérico (válido para n dimensões) para as distâncias baseadas nas métricas 8-vizinhos, em 2D, e 26-vizinhos, em

3D. Seja $p \in \mathbb{Z}^n$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $q \in \mathbb{Z}^n$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, temos

$$D^{Euclidean}(p, q) = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2 \quad (2.2)$$

$$D^{City-block}(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + \dots + |p_n - q_n| \quad (2.3)$$

$$D^{Chessboard}(p, q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|, \dots, |p_n - q_n|\} \quad (2.4)$$

Antes de falarmos de algoritmos, vejamos a TD por um outro ponto de vista. Com uma pequena modificação da Equação 2.2, obtemos a equação de um parabolóide com origem no ponto $(q_1, q_2, 0)$.

$$p_3 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2, p \in \mathbb{Z}^3, q \in \mathbb{Z}^3 \quad (2.5)$$

Chamemos \mathcal{P}_q o parabolóide de origem em q , e consideremos um objeto X , em 2D, totalmente inserido no plano $z = 0$ do espaço Euclidiano 3D. Veja que para todo ponto $(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}_q$, o valor p_3 é exatamente a distância Euclidiana do ponto $(p_1, p_2, 0)$ ao ponto $(q_1, q_2, 0)$, que é a origem do parabolóide.

Considere agora que o ponto q pertence ao plano $z = 0$ mas não pertence a X , ou seja, $q \in \bar{X}$, $q = (q_1, q_2, 0)$. Seja \mathcal{P} a coleção composta pelos parabolóides com origem em q , para todo q . Mais formalmente, $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_q\}$, $q \in \bar{X}$, $q = (q_1, q_2, 0)$. Não é difícil notar que a Equação 2.1 define não somente a TD de X , mas também o *envelope inferior* da coleção \mathcal{P} , já que o valor p_3 de cada ponto (p_1, p_2, p_3) deste envelope é também o valor mínimo entre as distâncias de $(p_1, p_2, 0)$ a todos os pontos $(q_1, q_2, 0)$, $q \in \bar{X}$. Esta noção é diretamente extensível para outras métricas e para n dimensões.

Portanto, é importante enfatizar que o cálculo de uma TD pode ser interpretado como o cálculo do envelope inferior da coleção \mathcal{P} , independente do algoritmo usado.

Baseados em trabalho anterior que explorava a observação acima (Kolountzakis e Kutulakos, 1992), Saito e Toriwaki (1994a) propuseram um algoritmo separável eficiente para computar a TD Euclidiana em n -dimensões. Hirata (1996) (e também Meijster et al. (2000)) mostraram que a mesma idéia proposta originalmente por Saito e Toriwaki pode ser estendida para todas as métricas acima e também para as métricas de Chamfer e octogonal. Eles também propuseram um algoritmo linear para resolver o problema. Vamos dar a descrição da idéia principal de Saito e Toriwaki para a transformada de distância Euclidiana. Para simplificar as notações, vamos evitar tal descrição em n D. Damos a descrição em 3D, ao invés de 2D, porque a generalização de 2D para 3D é similar à generalização de 3D para 4D e assim por diante para as dimensões maiores. As notações em 3D manterão clara a generalização para n D.

Pela combinação das Equações 2.1 e 2.2 para o caso 3D, temos

$$TD_X^{Euclidean}(p) = \min\{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2, q \in \bar{X}\} \quad (2.6)$$

Com esta formulação, podemos obter um algoritmo eficiente em três etapas. Seja F a imagem de entrada que contém o objeto X e seu complementar \bar{X} , tal que $\bar{X} \neq \emptyset$. Consideramos que o valor de um ponto $p \in F, p = (p_1, p_2, p_3)$ pode ser acessado por $F(p)$, ou por $F((p_1, p_2, p_3))$, quando for necessário especificar as coordenadas. As três etapas do algoritmo são listadas abaixo.

1. Deriva-se de F , a imagem G definida como segue (processamento no primeiro eixo: linhas)

$$G((p_1, p_2, p_3)) = \min_{q_1}\{(p_1 - q_1)^2, (q_1, p_2, p_3) \in \bar{X}\} \quad (2.7)$$

2. Deriva-se da imagem acima G , a imagem H definida como segue (processamento no segundo eixo: colunas)

$$H((p_1, p_2, p_3)) = \min_{q_2}\{G((p_1, q_2, p_3)) + (p_2 - q_2)^2\} \quad (2.8)$$

3. Deriva-se da imagem acima H , a imagem S dada pela seguinte equação (processamento no terceiro eixo: profundidade)

$$S((p_1, p_2, p_3)) = \min_{q_3}\{H((p_1, p_2, q_3)) + (p_3 - q_3)^2\} \quad (2.9)$$

A imagem resultante S acima é a TD Euclidiana de F . Note a similaridade entre as etapas 2 e 3, cada uma delas fundindo informações da dimensão sendo processada com a informação acumulada no processamento de dimensões inferiores. Adicionando etapas similares, a generalização deste algoritmo para nD é direta. No caso 2D, somente as etapas 1 e 2 seriam executadas. A principal idéia explorada nesta formulação é a de que o cálculo do envelope inferior de uma coleção de hiperparabolóides em nD é separável em n cálculos de envelopes inferiores de parábolas, como mostra a Figura 2.1.

Suponha que temos a imagem G em 3D, pela formulação de Saito e Toriwaki, com dimensões $L_1 \times L_2 \times L_3$, como o resultado da etapa 1 e seja $g_{p_1, q_2, p_3} (1 \leq q_2 \leq L_2)$ uma linha paralela ao segundo eixo de G . Se considerarmos o conjunto das parábolas $P_2 = \{G(p_1, q_2, p_3) + (p_2 - q_2)^2\}$ ao longo deste segundo eixo, a linha h_{p_1, q_2, p_3} após a etapa 2, é exatamente o envelope inferior de P_2 , com $1 \leq q_2 \leq L_2$.

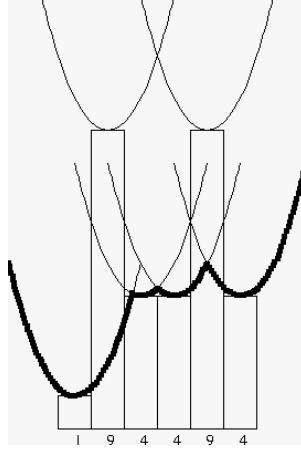


Figura 2.1: Ilustração do envelope inferior. Os valores no eixo horizontal são valores de distância obtidos pelo processamento em uma dimensão precedente, durante a execução de um algoritmo separável de transformada de distância.

De maneira similar, seja h_{p_1, p_2, q_3} ($1 \leq q_3 \leq L_3$) uma linha paralela ao terceiro eixo de H . Se considerarmos o conjunto das parábolas $P_3 = \{H(p_1, p_2, q_3) + (p_3 - q_3)^2\}$ ao longo do terceiro eixo, a fileira s_{p_1, p_2, q_3} após etapa 3, é exatamente o envelope inferior de P_3 , com $1 \leq q_3 \leq L_3$ (ver Figura 2.1). O resultado ao final de todo o processo (três etapas) é exatamente o envelope inferior da coleção \mathcal{P} (com as equações estendidas para 3D), acima descrito, *i.e.*, a TD.

Saito e Toriwaki propuseram um algoritmo para esta formulação. Embora eficiente, a operação \min nas etapas 2 e 3 têm um custo considerável e o algoritmo não é linear. Na seção seguinte apresentamos um algoritmo que otimiza a proposta de Saito e Toriwaki.

2.2 Algoritmo de Hirata

Nesta seção, explicamos como um algoritmo linear pode ser obtido a partir da formulação de Saito e Toriwaki, descrita na seção precedente, e mostramos como esta formulação pode ser generalizada para diferentes métricas.

Como vimos anteriormente, o problema de computar o envelope inferior da coleção \mathcal{P} é reduzido à computação de diversos envelopes inferiores de parábolas. A operação \min nas etapas 2 e 3 faz isto, e Saito e Toriwaki deram uma

solução eficiente para tal operação. Entretanto, Hirata (1996) propôs uma otimização usando duas pilhas, que reduziu a complexidade do algoritmo de Saito e Toriwaki para linear. Meijster et al. (2000) redescobriram a mesma otimização e propuseram o mesmo algoritmo de Hirata, com uma apresentação mais didática, que usamos a seguir.

Function DTstep1 (F)

```

/* Seja X o objeto em F e  $L_x \times L_y$  as dimensões de X
*/
1 forall  $x \in [0..L_x - 1]$  do
    // varredura 1
2     if  $F(x, 0) \in \bar{X}$  then  $G(x, 0) \leftarrow 0$ ;
3     else  $G(x, 0) \leftarrow \infty$ ;
4     for  $y \leftarrow 1$  to  $L_y - 1$  do
5         if  $F(x, y) \in \bar{X}$  then  $G(x, y) \leftarrow 0$ ;
6         else  $G(x, y) \leftarrow 1 + G(x, y - 1)$ ;
    // varredura 2
7     for  $y \leftarrow L_y - 2$  downto 0 do
8         if  $G(x, y + 1) < G(x, y)$  then
9              $G(x, y) \leftarrow 1 + G(x, y + 1)$ ;
10 return G;
```

Já explicamos as idéias principais do algoritmo em 3D, com o intuito de deixar clara sua generalização para nD . Entretanto, para simplificar a compreensão das listagens de algoritmos, apresentamo-las em 2D. A primeira etapa é computada pela Função DTstep1. A Função DTstep1 processa a imagem coluna a coluna (linha 1) com uma varredura para diante (linhas 2-6) e uma varredura no sentido contrário (linhas 7-9), gerando uma TD 1D para cada coluna. Ao invés de computar G de acordo com a Equação 2.7, as potências de 2 não são calculadas e são portanto deixadas para a etapa subsequente. Assim a imagem G será também válida para outras métricas.

A etapa 2 (e as etapas subsequentes em dimensões mais elevadas) é o processo de fundir as distâncias calculadas para cada coluna na etapa 1, com as distâncias calculadas para as outras colunas. Para uma dada fileira y da imagem, cada ponto (x, y) , $0 \leq x < L_x$ é o centro de uma parábola P_x dada pela equação

$$P_x(i) = G(x, y) + (i - x)^2 \quad (2.10)$$

A abcissa da interseção entre duas parábolas é chamada de *separação* entre as parábolas. Assim, a separação entre duas parábolas $P_u(i)$ e $P_v(i)$, para a linha y , com $u < v$, é dada por

$$Sep(u, v) = \left\lfloor \frac{v^2 - u^2 + G(v, y)^2 - G(u, y)^2}{2(v - u)} \right\rfloor \quad (2.11)$$

Com estas equações, a segunda etapa da TD Euclidiana é computada pela Função DTstep2, listada abaixo. Note que Equações 2.10 e 2.11 têm seus equivalentes em outras métricas, e a Função DTstep2 pode facilmente ser adaptada.

Function DTstep2 (G, M)

```

// Seja  $m \times n$  as dimensões de X
1 forall  $y \in [0..n-1]$  do
2    $q \leftarrow 0; s[0] \leftarrow 0; t[0] \leftarrow 0;$ 
   // varredura 3
3   for  $u \leftarrow 1$  to  $m-1$  do
4     while  $q \geq 0 \wedge f(t[q], s[q]) > f(t[q], u)$  do  $q \leftarrow q - 1;$ 
5     if  $q < 0$  then
6        $q \leftarrow 0; s[0] \leftarrow u;$ 
7     else
8        $w \leftarrow 1 + Sep(s[q], u);$ 
9       if  $w < m$  then
10         $q \leftarrow q + 1; s[q] \leftarrow u; t[q] \leftarrow w;$ 
   // varredura 4
11  for  $u \leftarrow m-1$  downto 0 do
12     $dt[u, y] \leftarrow f(u, s[q]);$ 
13    if  $u = t[q]$  then  $q \leftarrow q - 1$ 
14 return TD;
```

Finalmente, para se obter a transformada de distância do objeto X, com respeito à métrica M , basta computar

$$TD = \text{DTstep2}(\text{DTstep1}(X), M) \quad (2.12)$$

2.3 Transformada de distância unificada e separável a sementes

Na seção precedente mostramos um algoritmo separável para a computação da TD em diversas métricas diferentes. Da maneira como foi apresentado, o algoritmo é incapaz de calcular as distâncias, de cada ponto no objeto, a um conjunto arbitrário de sementes. A Figura 2.2 ilustra tal tipo de TD. Com este tipo de TD esperamos obter melhorias para os algoritmos que propomos nesta tese, como veremos na Capítulo 6.

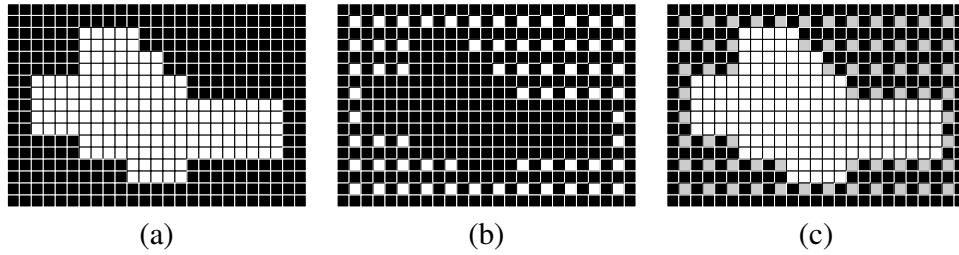


Figura 2.2: Transformada de distância a sementes. (a) O objeto original; (b) o conjunto de sementes; (c) o objeto em branco e as sementes em cinza.

Este problema é uma generalização da TD, mas todos os algoritmos citados neste capítulo podem ser adaptados para resolvê-lo. O algoritmo de Falcão et al. (2004), por exemplo, já foi concebido neste formato generalizado de TD. Os algoritmos separáveis de varredura de linhas, no entanto, raramente fazem referências a este problema.

Apresentamos a seguir uma generalização do algoritmo separável de TD, de modo que supra a falta de um algoritmo separável para a transformada de distância a sementes. Vamos dar uma definição formal de tal transformada de distância.

Definição 2 (TD a sementes) *Seja $X \subset \mathbb{Z}^n$, $S \subset \mathbb{Z}^n$ e M uma métrica, a transformada de distância do objeto X ao conjunto S , com respeito à métrica M , denotado por $TD_{\{X,S\}}^M$, associa a cada ponto $x \in X$ sua distância ao ponto mais próximo em S , com respeito à métrica M :*

$$TD_{\{X,S\}}^M(x) = \min\{D^M(x, y), y \in S\} \quad (2.13)$$

onde $D^M(x, y)$ é a distância do ponto x ao ponto y com respeito à métrica M .

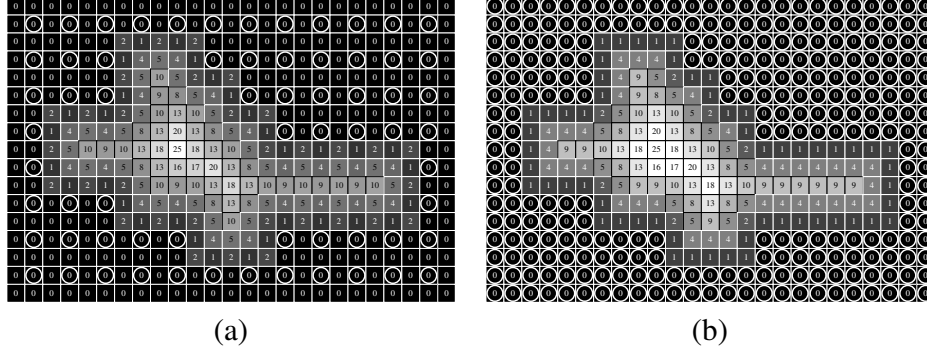


Figura 2.3: Transformada de distância a sementes: exemplo. Seja X o objeto da Figura 2.2(a), temos (a) a transformada de distância de X às sementes da Figura 2.2(b) (pontos circulados) e (b) a transformada de distância de X ao conjunto de sementes composto por todos os pontos em \bar{X} (pontos circulados). O resultado em (b) é equivalente à transformada de distância ordinária de X .

Note que a interseção do conjunto de sementes com o objeto não é necessariamente vazia.

A transformada de distância a sementes pode ser computada pelos algoritmos existentes, fazendo-se duas etapas: (i) o conjunto \bar{S} é considerado o objeto e a transformada de distância $TD_{\bar{S}}^M$ é computada; (ii) os pontos que não pertencem a X são eliminados. Este procedimento pode ser descrito pela seguinte equação.

$$TD_{\{X,S\}}^M = \{TD_{\bar{S}}^M(x), x \in X\} \quad (2.14)$$

Note que se $S = \bar{X}$, a Equação 2.14 é equivalente à Equação 2.1.

A idéia para adaptar o algoritmo de Hirata é simples. Modifica-se a segunda etapa (mais precisamente, a varredura 4) de modo que o algoritmo calcule a Equação 2.14. Isso é feito pela inclusão de uma operação de interseção na linha 12. Logo, o algoritmo resultante é este listado na Função `DTSstep2`.

Function DTSstep2 (G, X, M)

```

// Seja  $m \times n$  as dimensões de  $X$ 
1 forall  $y \in [0..n-1]$  do
2    $q \leftarrow 0; s[0] \leftarrow 0; t[0] \leftarrow 0;$ 
   // varredura 3
3   for  $u \leftarrow 1$  to  $m-1$  do
4     while  $q \geq 0 \wedge f(t[q], s[q]) > f(t[q], u)$  do  $q \leftarrow q-1;$ 
5     if  $q < 0$  then
6        $q \leftarrow 0; s[0] \leftarrow u;$ 
7     else
8        $w \leftarrow 1 + \text{Sep}(s[q], u);$ 
9       if  $w < m$  then
10         $q \leftarrow q+1; s[q] \leftarrow u; t[q] \leftarrow w;$ 
   // varredura 4
11  for  $u \leftarrow m-1$  downto 0 do
12    if  $X[u, y]$  then  $dt[u, y] \leftarrow f(u, s[q]);$ 
13    if  $u = t[q]$  then  $q \leftarrow q-1$ 
14 return  $TD;$ 

```

Finalmente, para se obter a transformada de distância do objeto X ao conjunto S , com respeito à métrica M , computa-se

$$TDS = \text{DTSstep2}(\text{DTstep1}(\bar{S}), X, M) \quad (2.15)$$

Alguns exemplos desta TD são dados na Figura 2.3. No Capítulo 4, apresentaremos o HMA, e damos um algoritmo eficiente para computá-lo exatamente. Acreditamos que uma TD às sementes pode ser usada para a derivação de um algoritmo ótimo, baseado nas mesmas idéias propostas por (Cœurjolly, 2003; Saito e Toriwaki, 1994b) para a extração de um subconjunto do eixo mediano clássico. Discutiremos este ponto mais adiante, ao propor os trabalhos futuros (Seção 6.1).

Capítulo 3

Eixo Mediano e Esqueletos Homotópicos

Neste capítulo apresentamos uma revisão dos conceitos relacionados aos esqueletos Euclidianos homotópicos. Discutimos a definição original do eixo mediano no plano contínuo e suas propriedades. Cada propriedade é descrita. Uma seção é dedicada a uma explanação informal do conceito de topologia, já que o volume necessário para uma descrição formal seria demasiado grande. Ilustramos as propriedades perdidas pela formulação discreta do eixo mediano e damos um breve histórico da literatura existente sobre o assunto. Apresentamos uma visão geral dos algoritmos existentes para a extração dos esqueletos Euclidianos homotópicos e mostramos que muitos avanços devem ainda ser desenvolvidos. Encerramos o capítulo com uma motivação para o esqueleto Euclidiano homotópico exato em resolução aumentada, a contribuição principal desta tese.

As teses de doutorado de Talbot (1993) e de Daragon (2005) foram muito úteis para a escrita deste capítulo.

3.1 O conceito de eixo mediano

Blum (1961) introduziu a noção de esqueleto ou *eixo mediano*, baseado em um conceito de *fogo de pradaria*. Se considerarmos um objeto $X \in \mathbb{R}^n$, e um fogo propagando das bordas ao interior do objeto, o esqueleto é o conjunto dos pontos onde duas ou mais frentes de fogo se tocam. Ilustramos esta noção na Figura 3.1.

A definição de eixo mediano foi mais tarde formalizada por Calabi e Hartnett (1968) com um conceito de *discos máximos*. Ambas as definições são equiva-

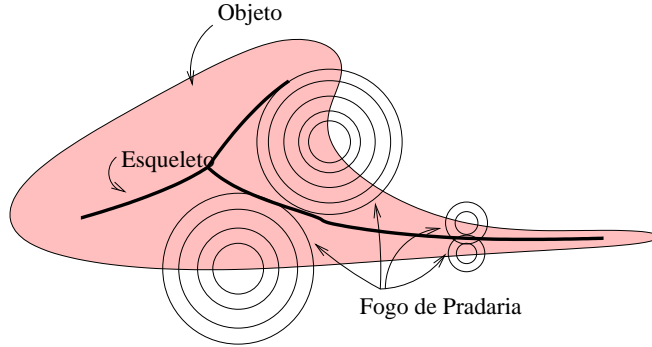


Figura 3.1: Ilustração do eixo mediano com a abordagem de fogo de pradaria.

lentes no plano contínuo. Entretanto, não têm a mesma formulação discreta. O nome *eixo mediano* foi sendo cada vez mais associado ao formalismo de Calabi e Hartnett ao longo do tempo, e esta se tornou a definição mais usada pela comunidade. Seja um objeto $X \in \mathbb{R}^n$, um *disco máximo* é um disco incluído em X e não estritamente incluído em qualquer outro disco, este último também incluído em X . O *eixo mediano* de X é o conjunto dos centros de discos máximos em X . No plano contínuo, esses discos máximos tocam as bordas do objeto em, no mínimo, dois pontos. A definição de eixo mediano é ilustrada na Figura 3.2 para o caso contínuo.

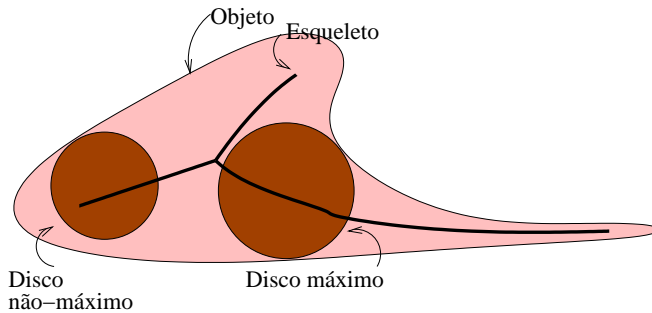


Figura 3.2: Ilustração do eixo mediano pela abordagem de discos máximos.

O eixo mediano no plano contínuo tem algumas propriedades que são consideradas muito importantes para um esqueleto:

- **Fino.** Não tem nenhum ponto interior. Em 2D, por exemplo, em cada disco

máximo “toca” ao menos dois pontos da borda do objeto (veja Figura 3.2).

- **Centrado.** Cada ponto no eixo mediano é o centro de um disco máximo e está a igual distância de dois ou mais pontos no fundo.
- **Reversível.** A união de todos os discos máximos de um objeto é igual ao próprio objeto. Se os raios dos discos máximos forem armazenados junto a seus centros no eixo mediano, a transformação é reversível. O objeto pode ser reconstruído a partir do conjunto dos centros e raios de seus discos máximos.
- **Homotópico.** O eixo mediano de um objeto tem a mesma topologia do objeto. Uma explicação informal sobre homotopia é dada na Seção 3.2.

O eixo mediano discreto não tem as mesmas propriedades de sua contrapartida contínua. Discutimos mais tarde neste capítulo os problemas impostos pela discretização.

3.2 Homotopia: uma introdução informal

Neste capítulo damos uma introdução à topologia e o termo homotopia, com uma abordagem intuitiva. Para obter informações adicionais, o leitor pode consultar a tese de Daragon ou a tão rica literatura sobre o assunto.

Topologia é o estudo das propriedades dos objetos, que são preservadas quando uma transformação contínua é aplicada ao objeto. Intuitivamente, uma transformação contínua é uma transformação que não elimine nem crie novos furos ou cavidades existentes no objeto. Uma bola pode ser deformada continuamente até se transformar num cubo ou num ponto, mas nunca pode ser transformada em um anel, já que o anel tem um buraco (ou túnel) e a bola não. A idéia de uma deformação contínua é formalizada pela noção de homotopia. Se existe uma transformação homotópica de um objeto A em um objeto B , então todas as características topológicas de A são preservadas.

Conectividade é uma dessas características topológicas. Uma relação de adjacência é estabelecida entre cada ponto e alguns pontos vizinhos. Um conjunto X de pontos é dito conexo se, para qualquer par de pontos em X , existe um caminho em X entre eles, seguindo as relações de adjacência. Um componente conexo de X é um subconjunto de X que é conexo e máximo para esta propriedade. Em

processamento de imagem (caso 2D), os pontos são os *pixels* da imagem e as relações usuais da adjacência são as conectividades 4- e 8-vizinhos, onde o objeto é 4-conexo e o fundo é 8-conexo, ou vice-versa. Estas duas relações usuais de adjacência são ilustradas nas Figuras 3.3 e 3.4.

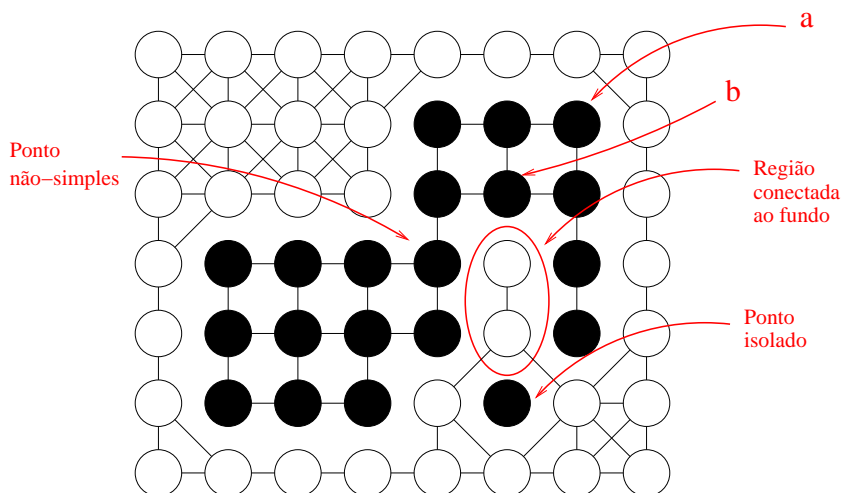


Figura 3.3: Pontos simples na 4-adjacência. O objeto está em preto e o fundo, em branco. Há dois componentes 4-conexos. Cada componente 4-conexo é topologicamente equivalente a um ponto. Os pontos *a* e *b* são simples, mas se ambos forem removidos, a topologia será modificada.

O equivalente às transformações contínuas na topologia digital está fortemente ligado à noção de *ponto simples*. Um ponto simples é um ponto no conjunto que pode ser removido sem modificar a topologia. Na Figura 3.3, o ponto *a* é simples, assim como o ponto *b*. Se o ponto marcado como não-simples for removido do objeto, o componente conexo que o contém será dividido em dois.

A topologia é uma característica global do conjunto. Entretanto, a caracterização de um ponto como simples ou não-simples pode ser feita localmente, o que permite que as transformações homotópicas sejam executadas sem visitar todo o conjunto para cada etapa. Caracterização local, porém, não significa que uma transformação pode ser executada ao mesmo tempo para um conjunto de pontos, mesmo se cada um desses pontos tenha sido identificado localmente como simples. Observe, por exemplo, os pontos *a* e *b* na Figuras 3.3 e 3.4. Em ambas as figuras, *a* e *b* são simples, mas podem somente ser removidos ao mesmo tempo se o objeto for 8-conexo (Figura 3.4). Para o objeto 4-conexo, remover *a* e *b*, ao

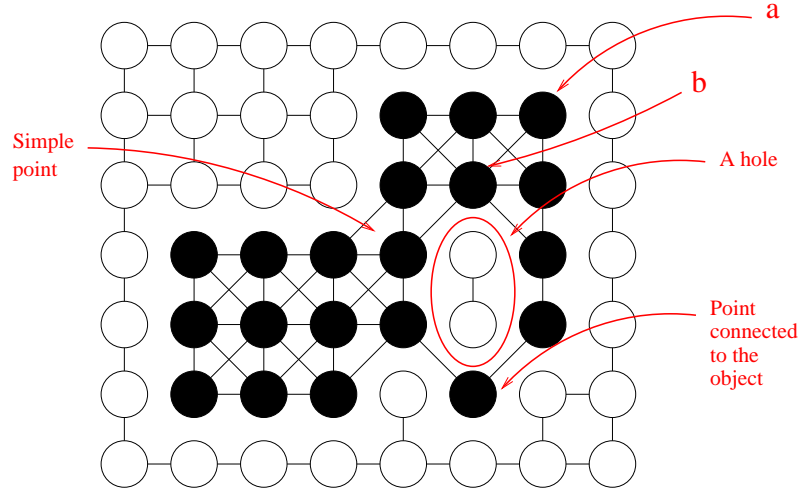


Figura 3.4: Pontos simples em 8-adjacência. O objeto está em preto e fundo, em branco. Há apenas um componente 8-conexo, que é topologicamente equivalente a um anel. Os pontos *a* e *b* são simples e mesmo que ambos sejam removidos a topologia não é alterada.

mesmo tempo, gera o mesmo problema de remover o ponto não-simples apontado pela seta: o objeto é dividido em dois.

Apesar da apresentação muito simples e informal de topologia e homotopia, acreditamos que o conteúdo deste capítulo será suficiente para a compreensão do restante desta tese.

3.3 Eixo mediano discreto

Nesta seção ilustramos os problemas causados pela discretização do eixo mediano. Na Figura 3.5, mostramos um objeto discreto e seu eixo mediano discreto, baseados na métrica Euclidiana.

Na Figura 3.5, o mais fácil de ser observado é que a homotopia e a finura são perdidas, se considerarmos a 4- ou a 8-adjacência. O eixo mediano discreto de um objeto com um único componente conexo possui muitos componentes conexos. Além disso, pode-se observar que o eixo mediano é dois-pixels espesso em diversas regiões (de Souza, 2002).

Mesmo no caso discreto, o eixo mediano, por definição, é centrado com res-

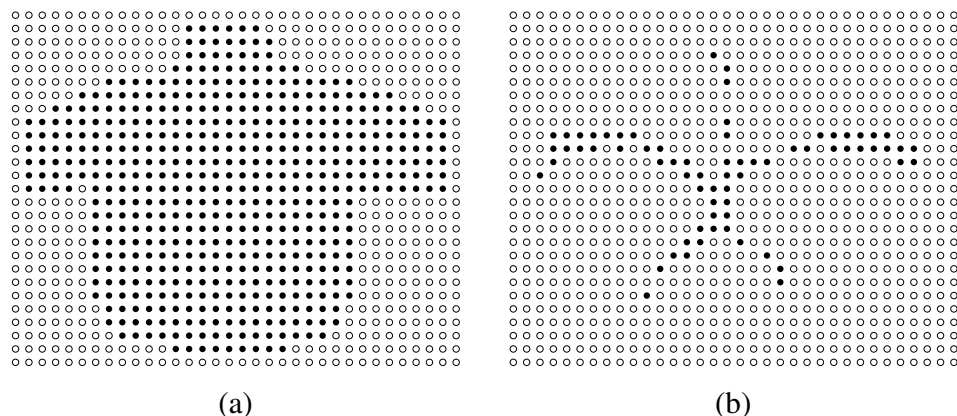


Figura 3.5: Eixo mediano discreto: homotopia e finura são perdidos. Em preto temos: (a) objeto e (b) seu eixo mediano. Tanto para a 4- quanto para a 8-adjacência, o objeto é um único componente 4- ou 8-conexo, respectivamente. Tal componente é topologicamente equivalente a um ponto. Porém, na 8-adjacência seu eixo mediano Euclidiano exato tem seis componentes conexos, com muitas regiões espessas de dois-pixels. Na 4-adjacência o número de componentes 4-conexos sobe para 13.

peito à métrica de distância usada, já que é o centro de discos máximos em tal métrica.

Uma outra propriedade preservada é reversibilidade. No caso discreto, a igualdade entre o objeto e a união de seus discos máximos é mantida.

Devido à necessidade crescente de formulações discretas, os problemas listados acima foram assunto para uma vasta literatura, desde a contribuição original de Blum. Além da preocupação em se estudar esqueletos com propriedades específicas, diversos algoritmos para computá-los também foram propostos. Na sequência, damos um breve histórico da literatura sobre o assunto.

3.4 Esqueletos discretos

Vamos estudar os esqueletos discretos procurando cada uma das propriedades listadas acima, começando pela homotopia. O problema de se obter esqueletos homotópicos é desafiador. Para garantir a preservação da topologia, as noções dadas na Seção 3.2 são necessárias. Chamamos de *afinamento homotópico* o processo

iterativo de retrainar um objeto até a estabilidade. Em uma imagem digital, isto é feito geralmente por remoção de pontos simples. Já ilustramos a noção de pontos simples nas Figuras 3.3 e 3.4.

O processo de suprimir pontos simples pode ser seqüencial ou paralelo. No afinamento seqüencial, uma única operação é a remoção de um único ponto simples. Como indicado na Seção 3.2, embora a topologia seja característica global de um objeto, a caracterização de um ponto de tal objeto como simples ou não-simples pode ser executada baseado em informação local, permitindo que existam algoritmos rápidos para o afinamento seqüencial. O inconveniente desta abordagem, entretanto, é o número de decisões arbitrárias, com respeito à ordem de remoção de pontos simples, necessárias durante todo o processo. Se nenhuma ordem for imposta para as remoções seqüenciais, ambos os esqueletos das Figuras 3.6(a) e (b) estão corretos, mas nenhum deles é centrado com respeito a nenhuma métrica ordinária. Uma transformada de distância pode ser usada para guiar o processo de afinamento. Por exemplo, pontos com menor distância ao fundo poderiam ter uma prioridade mais elevada de serem suprimidos. As decisões arbitrárias permanecem mesmo neste caso, pois podem existir diversos pontos simples com iguais valores na TD e torna-se necessário decidir qual deles deve ser removido primeiro.

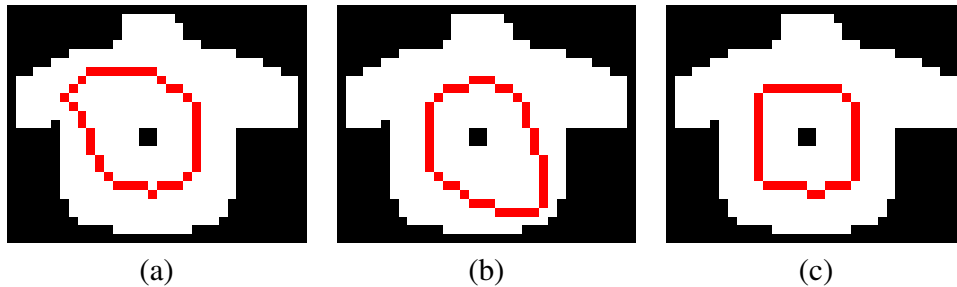


Figura 3.6: Afinamento homotópico e pontos simples. (a) e (b) esqueletos homotópicos finos com diferentes escolhas arbitrárias, (c) esqueleto homotópico fino obtido por uma remoção simétrica de pontos simples.

Um afinamento paralelo tende a reduzir ou eliminar as decisões arbitrárias, mas o conceito de ponto simples não é mais suficiente para tal abordagem. No afinamento paralelo, uma única operação é a remoção de todo um conjunto de pontos ao mesmo tempo, sempre preservando a topologia. Note, por exemplo, os pontos *a* e *b* na Figura 3.3. Ambos os pontos são simples, mas se *b* for suprimido, *a* deixa de ser simples e vice-versa. A identificação de um conjunto de pontos que

podem ser suprimidos ao mesmo tempo não é evidente, e esta afirmação torna-se clara quando observamos que alguns algoritmos de afinamento paralelo na literatura são incorretos (Couprie, 2006).

Se a estabilidade for atingida por um afinamento homotópico, guiado por uma função de distância e com operações simétricas, o esqueleto resultante é centrado, mas a reversibilidade não é garantida.

A idéia mais usual para se obter um esqueleto homotópico e reversível é extrair o eixo mediano do objeto e, na sequência, executar um afinamento homotópico com a restrição de não remover pontos do eixo mediano. O eixo mediano, entretanto, não é fino, e o esqueleto resultante, embora centrado, reversível e homotópico, é espesso.

Certamente, quando homotopia é importante para o esqueleto, um esqueleto completamente fino, ou seja, com apenas um pixel de largura, não pode ser garantido. Alguns objetos complexos tais como o objeto da Figura 3.7 são muito comuns.

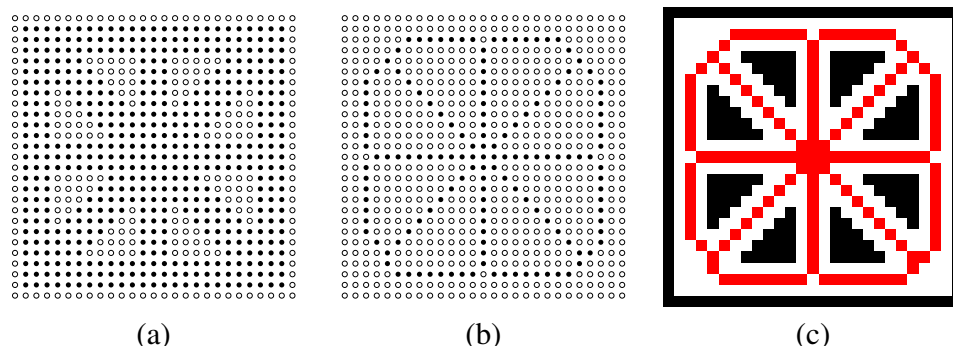


Figura 3.7: Um esqueleto completamente fino não pode ser obtido. (a) O objeto, (b) seu esqueleto último, sem ponto simples, e (c) superposição de (b) em (a), representado como uma imagem binária, onde o objeto está em branco, o fundo está em preto, e o esqueleto em cinza. Note que o ponto central da imagem, onde há o cruzamento de oito linhas, é uma região onde o esqueleto é espesso.

Damos um exemplo dos esqueletos homotópicos guiados pela distância Euclidiana, com e sem restrição, na Figura 3.8.

Note que a maneira de se obter as quatro propriedades desejadas em um único esqueleto discreto ainda merece estudo. Não existe nenhum algoritmo que calcula um esqueleto com as mesmas propriedades que o eixo mediano contínuo de Blum.

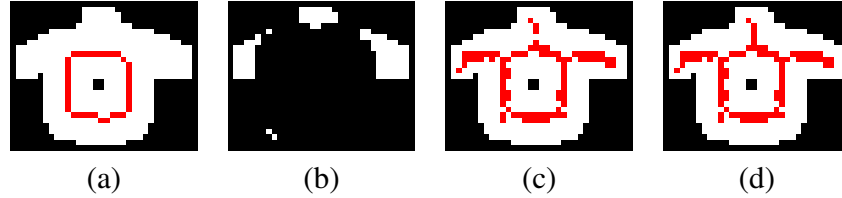


Figura 3.8: Esqueletos Euclidianos homotópicos em 8-adjacência. (a) esqueleto homotópico obtido pelo afinamento guiado pela distância Euclidiana; (b) pontos não reconstruídos a partir da informação disponível no esqueleto de (a), mostrando a perda de reversibilidade; (c) o eixo mediano Euclidiano exato, que garante a reversibilidade; e (d) o esqueleto homotópico obtido pelo afinamento guiado pela distância Euclidiana, restringido pelo eixo mediano.

Como observamos, finura não é compatível com homotopia.

3.5 Algoritmos existentes

Vamos relembrar os algoritmos existentes para a computação do eixo mediano e de esqueletos homotópicos.

3.5.1 Eixo mediano

Até este ponto do capítulo, mencionamos o termo “distância” diversas vezes. Como discutimos no Capítulo 2, tal termo depende da métrica usada. Seja $X \in \mathbb{Z}^n$, $p \in X$ e M uma métrica, o valor $TD_X^M(p)$ é equivalente ao raio do disco máximo centrado em p e incluso em X . Vemos aqui a importância da transformada de distância para o estudo dos esqueletos discretos.

Observe que a complexidade dos algoritmos para extrair eixos medianos está fortemente ligada à complexidade dos algoritmos para a transformada de distância. É natural que os algoritmos eficientes para o eixo mediano tenham aparecido primeiramente para as métricas discretas como 4- ou 8-vizinhos, distâncias de Chamfer e para uma métrica Euclidiana aproximada. Rosenfeld e Pfaltz (1966) já haviam mostrado para as distâncias 4- e 8-vizinhos, que um ponto x está no eixo mediano de um objeto X se e somente se ele for um máximo local da transformada de distância de X . Muitos outros algoritmos apareceram mais tarde (Borgefors et al., 1991; Lantuéjoul, 1978; Meyer, 1990; Pudney, 1998; Rémy e Thiel, 2002;

Talbot e Vincent, 1992; Vincent, 1991). Os algoritmos que calculam uma aproximação do eixo mediano Euclidiano, reversíveis ou não, foram também contribuições importantes (Cœurjolly, 2003; Saito e Toriwaki, 1994b; Shih e Pu, 1995).

As distâncias discretas têm a vantagem de possibilitar algoritmos rápidos mas, como indicado no Capítulo 2, muitas aplicações necessitam a distância Euclidiana. A sensibilidade à rotação é um dos inconvenientes principais da distância discreta. Ilustramo-lo na Figura 3.9.

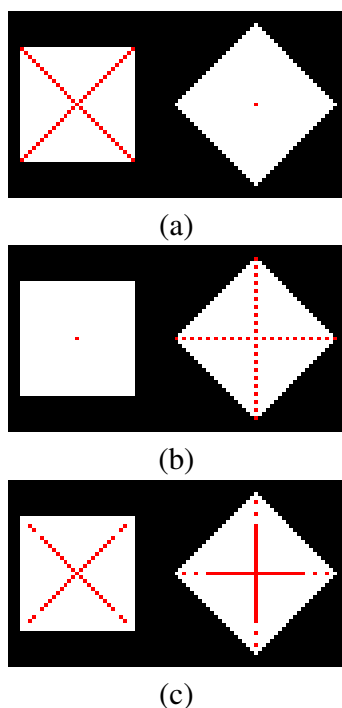


Figura 3.9: Sensibilidade à rotação, em métricas discretas. Eixos medianos são extraídos de um quadrado e de um quadrado rotacionado de um ângulo de 45 graus: (a) métrica 4-vizinhos, (b) métrica 8-vizinhos, e (c) métrica Euclidiana. Note como a métrica Euclidiana é bem menos sensível à rotação que as outras.

Assim como para os algoritmos de transformada de distância, os algoritmos eficientes para a extração de um eixo mediano exato com a métrica Euclidiana são muito recentes, mas já foram propostos. Inspirando-se em trabalho anterior de Borgefors et al. (1991), Rémy e Thiel (2005) propuseram um algoritmo muito rápido para o eixo mediano Euclidiano exato, baseado em tabelas pré-computadas

(look-up tables). O algoritmo de Rémy e Thiel foi muito importante para os resultados desta tese, pois nos baseamos fortemente nele para propor nosso algoritmos.

3.5.2 Esqueletos homotópicos

Mencionamos que para obter um esqueleto discreto que seja centrado, homotópico e reversível, uma prática comum é executar um afinamento homotópico, guiado pela transformada de distância, com a restrição de preservar o eixo mediano da forma. Identificamos também a vantagem de usar um algoritmo de afinamentos paralelo, pois não depende de decisões arbitrárias.

A propósito dos algoritmos de afinamento paralelo, o primeiro encontrado na literatura foi proposto por Rutovitz (1966), e a topologia digital apareceu alguns anos mais tarde (Rosenfeld, 1970). Em 1988, Ronse apresentou os conjuntos não simples mínimos (Ronse, 1988). Bertrand introduziu a noção de pontos P-simples na década seguinte (Bertrand, 1995), e a evolução de seus estudos levou à definição dos *núcleos críticos*, dez anos depois (Bertrand, 2005).

Couprie (2006) estudou diversos algoritmos de afinamento paralelo da literatura e descobriu que alguns deles não asseguram a preservação da topologia. Certamente, não é trivial detectar se um ponto pode fazer parte de um conjunto de pontos que podem ser suprimidos somente olhando uma vizinhança local.

Entretanto, com o *framework* definido por Bertrand (2005), um conjunto de pontos que podem ser suprimidos em paralelo é identificado por uma consulta à vizinhança de cada ponto na borda do objeto. Tal *framework* permite algoritmos de afinamento paralelo muito eficientes que garantem a preservação da topologia (Bertrand e Couprie, 2006a,c) em n dimensões, para um n arbitrário.

Este *framework* é definido no contexto dos complexos abstratos, e é apresentado no artigo reproduzido no Capítulo 5. Como a apresentação feita no artigo é muito curta e densa, damos uma visão mais didática dos núcleos críticos na Seção 3.6.

3.6 Núcleos críticos

Nesta seção apresentamos os *núcleos críticos*, um *framework* para o afinamento homotópico em paralelo, proposto por Bertrand (2005). Esta seção servirá como uma referência para os capítulos seguintes, já que apresenta uma descrição didática do *framework*.

Os núcleos críticos são definidas no contexto dos complexos abstratos. Deixemos dar uma introdução de tal contexto.

Primeiramente, existe a noção de *faces*. Consideremos \mathbb{Z}^n , $n \geq 2$. Um subconjunto de \mathbb{Z}^n composto de um ponto é chamado uma *0-face*. Um subconjunto de \mathbb{Z}^n composto por dois pontos vizinhos é chamado de *1-face*, e um subconjunto de \mathbb{Z}^n composto por quatro pontos vizinhos, formando um quadrado, é chamado uma *2-face*. Pode-se também falar de *m-faces*, que são faces *m*-dimensionais em um espaço *n*-dimensional. Figura 3.10 ilustra as *m-faces* com $m \leq 2$.

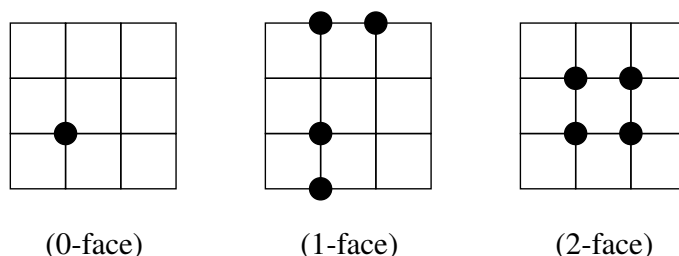


Figura 3.10: O conceito de faces.

As faces da Figura 3.10 podem ser representadas graficamente pelo modelo mostrado na Figura 3.11.

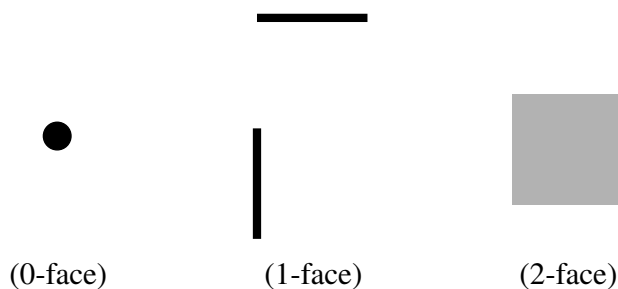


Figura 3.11: Faces numa representação gráfica.

Podemos agora definir o *fechamento* de uma face. Seja f uma face. O fechamento de f , denotado por \hat{f} , é o conjunto composto por todas as faces inclusas em f . O conjunto \hat{f} é chamado de *célula*. Se X for um conjunto finito de faces,

escrevemos $X^- = \cup \{\hat{f} \mid f \in X\}$, X^- é o *fechamento de X* . A Figura 3.12 ilustra este conceito.

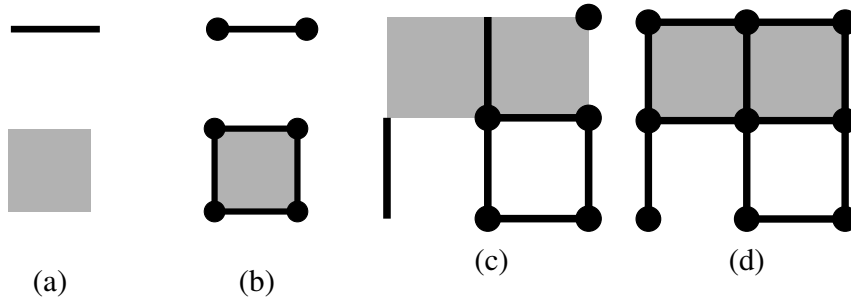


Figura 3.12: O fechamento de uma face e o fechamento de um conjunto finito das faces. Temos (a) uma 1-face f_1 (em cima) e uma 2-face f_2 (em baixo), (b) suas células correspondentes \hat{f}_1 e \hat{f}_2 (em cima e em baixo, respectivamente), (c) um conjunto finito de faces X e (d) o fechamento de X (X^-).

A *borda* de uma célula \hat{f} é o conjunto $\hat{f}^* = \hat{f} \setminus \{f\}$. O nome “borda” é já bastante sugestivo, e Figura 3.13 mostra algumas bordas.

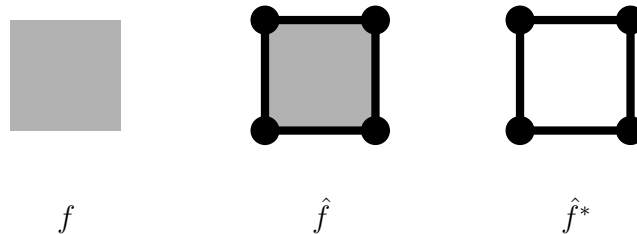


Figura 3.13: A borda de uma célula. Da esquerda para a direita, a face f , sua célula correspondente \hat{f} , e a borda \hat{f}^* da célula.

Um conjunto finito X de faces, tal que $X = X^-$, é chamado de *complexo*. Veja a Figura 3.14 para uma representação gráfica de um complexo.

Considerando um conjunto finito das faces X , a face $f \in X$ é *principal* se não houver nenhum $g \in X$ tal que f esteja incluso estritamente em g . Neste caso f é chamado uma *face principal*, ou um *facet*. Denotamos por X^+ o conjunto composto de todas as faces principais de X . Veja Figura 3.15

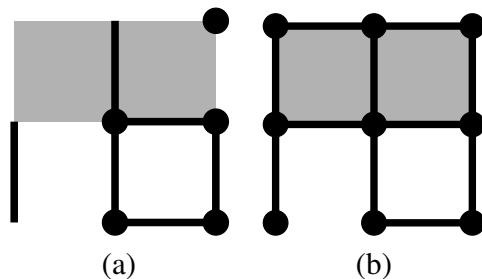


Figura 3.14: Ilustração de um complexo. (a) Um conjunto finito de faces que não é um complexo e (b) um conjunto finito de faces que é um complexo.

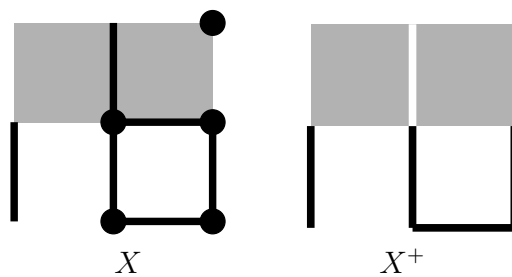


Figura 3.15: Faces principais (X^+) do conjunto finito de faces X .

Seja X e Y dois complexos. Se $Y \subseteq X$, dizemos que Y é um *subcomplexo* de X , e denotamos $Y \preceq X$. No caso especial onde Y é um subcomplexo de X e todas as faces principais de Y são faces principais de X , dizemos que Y é um *subcomplexo principal* de X . Sendo breve, Y é um subcomplexo principal de X se $Y \preceq X$ e $Y^+ \subseteq X^+$.

Seja X um complexo, $\dim(X) = \max\{\dim(f) \mid f \in X^+\}$ é a *dimensão* de X . Dizemos que X é um *m-complexo* se $\dim(X) = m$. E também, dizemos que X é *puro* se, para cada face principal f de X , tivermos $\dim(f) = \dim(X)$. Veja a Figura 3.16.

Para explorar complexos abstratos ao trabalhar com imagens nD , a abordagem usual é mapear cada ponto da imagem a uma n -face. Seja X um conjunto finito de faces resultado deste mapeamento. Vemos que $\dim(X) = n$ e é direto observar que X^- é um complexo puro (veja Figura 3.17).

A face f é uma *face de borda* se existir uma face $g \in \hat{f}, g \neq f$, tal que f é a única face de X que contém g . Tal face g é dita ser *livre* e o par (f, g) é dito ser

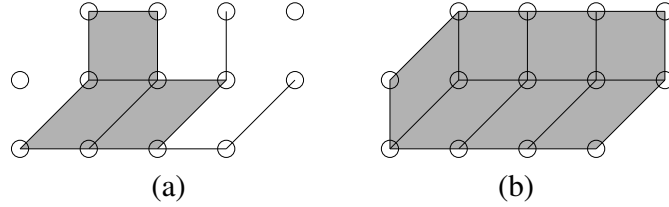


Figura 3.16: Complexos puros. (a) um complexo não-puro e (b) um 2-complexo puro.

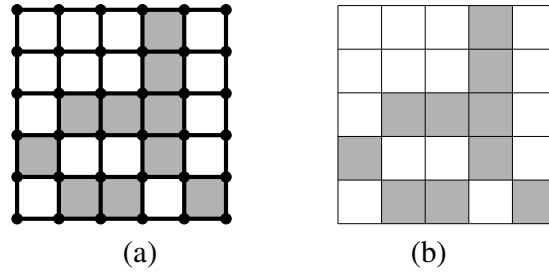


Figura 3.17: Mapeamento de uma imagem 2D binária em um 2-complexo cúbico puro. (a) um 2-complexo cúbico puro e (b) uma imagem binária.

um *par livre*. Veja uma ilustração de faces de borda na Figura 3.18.

Um conceito bem conhecido dos estudiosos de topologia é a operação de *contração*¹. Como indicado na Seção 3.2, a literatura é demasiada vasta e esta tese não é focada na topologia. Concentramos nas definições que nós usamos realmente neste manuscrito. Entretanto, independente do contexto, devemos dizer que uma propriedade importante da operação de contração é que ela preserva a topologia.

Seja (f, g) um par livre. O complexo $X \setminus \{f, g\}$ é uma *contração elementar* de X . Sejam X, Y dois complexos. Dizemos que X *se contrai em* Y se existir uma *seqüência de contrações* de X a Y (e.g. Figura 3.19). Se X se contrai em Y , dizemos também que Y é uma *retração* de X .

Podemos agora introduzir os núcleos críticos. As definições precedentes são conhecidas da comunidade. As seguintes definições foram propostas a fim suportar a definição de núcleos críticos.

¹em inglês, *collapse*, a ver no Capítulo 5

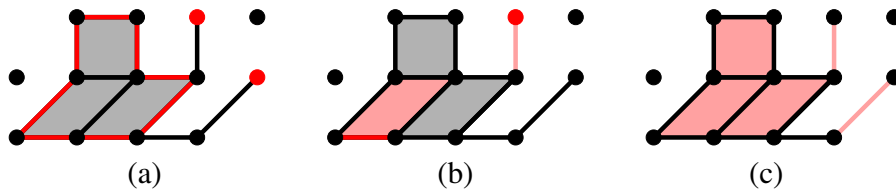


Figura 3.18: Faces de borda, dois pares livres e faces livres. (a) faces de borda, (b) dois pares livres e (c) faces livres.

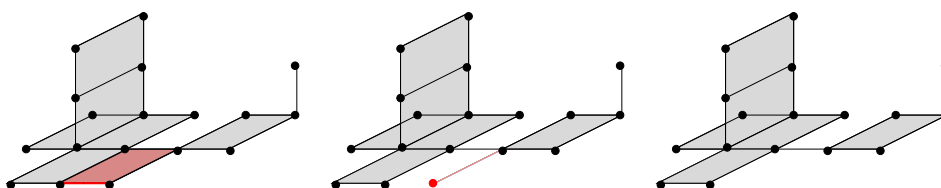


Figura 3.19: Uma sequência de contração com dois passos.

Definição 3 Dizemos que f é uma face essencial, ou que \hat{f} é uma célula essencial, se f for precisamente a interseção de todas as faces principais de X que contêm f . Denotamos por $Ess((), X)$ o conjunto composto de todas as faces essenciais de X .

Observe que toda face principal é essencial. Figura 3.20 dá exemplos de faces essenciais.

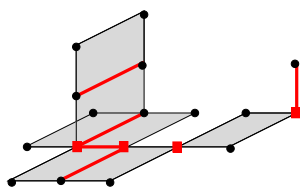


Figura 3.20: As 0- e 1-faces essenciais estão demarcadas.

Necessitamos também definir o *núcleo* de uma célula. Este conceito é ilustrado na Figura 3.21.

Definição 4 O núcleo de \hat{f} é o complexo, denotado por $Core((, \hat{f}), X)$, que é a união de todas as células essenciais estritamente inclusas em f .

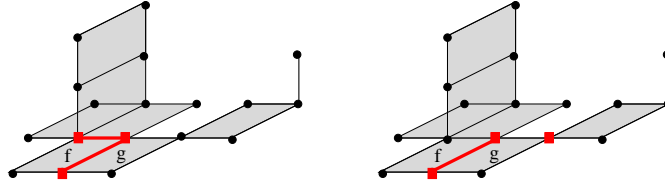


Figura 3.21: O núcleo de uma célula. (a) o núcleo de \hat{f} e (b) o núcleo de \hat{g} .

Da definição do núcleo, definimos uma *face crítica*.

Definição 5 Dizemos que f e \hat{f} são regulares se $f \in \text{Ess}((\cdot)X)$ e se \hat{f} se contrai em $\text{Core}((\cdot)\hat{f}, X)$. Dizemos que f e \hat{f} são críticas se $f \in \text{Ess}((\cdot)X)$ e se f não for regular.

Consultando a Figura 3.21, note que a face f é regular, ao passo que a face g é crítica.

Finalmente, vamos definir o *núcleo crítico*, que é o conjunto de todas as células cuja face principal é crítica.

Definição 6 Definimos $\text{Critic}(X) = \cup\{\hat{f} \mid f \text{ is critical}\}$, $\text{Critic}((\cdot)X)$ é o núcleo crítico de X .

Podemos ter uma sequência de extrações de núcleos críticos. Isto significa uma sequência $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ tal que $X_1 = \text{Critic}(X_0)$, $X_2 = \text{Critic}(X_1)$, os \dots , $X_n = \text{Critic}(X_{n-1})$. Tal sequência é um processo de afinamento, e duas etapas são ilustradas na Figura 3.22.

O Teorema 1 garante que o afinamento por uma sequência de extrações de núcleos críticos preserva a topologia.

Teorema 1 (Teorema principal de G. Bertrand) Em qualquer dimensão, o núcleo crítico de X é uma retração de X . Além disso, se Y for um subcomplexo principal de X tal que Y contenha o núcleo crítico de X , então Y é uma retração de X .

Com o Teorema 1, restrições geométricas podem ser adicionadas através da escolha de um subcomplexo apropriado Y para cada iteração. Em mais detalhe, é fácil assegurar, por exemplo, a inclusão do eixo mediano no esqueleto resultante. E, por construção, o caráter topológico é garantido.

Intuitivamente, uma célula \hat{f} de um complexo X é simples se sua remoção de X “não mudar a topologia de X ”.

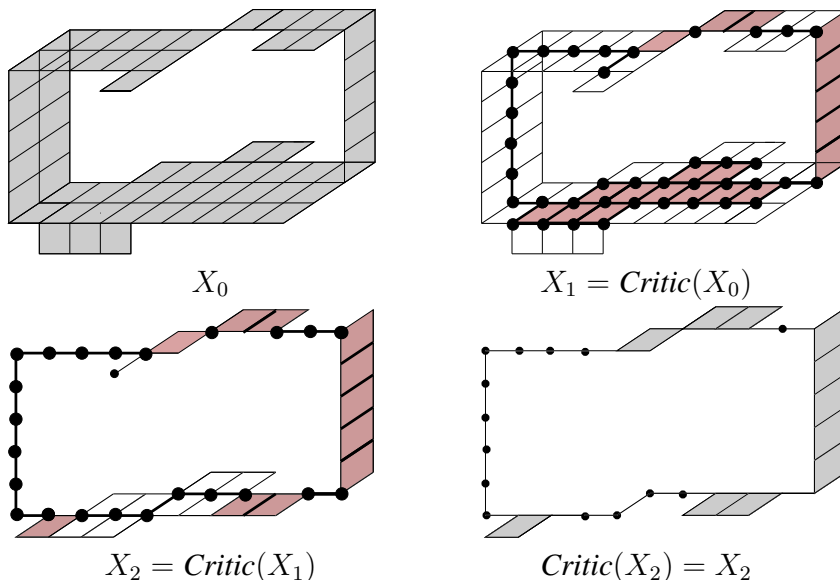


Figura 3.22: Uma sequência de extrações de núcleos críticos.

Definição 7 *Seja f uma face principal, dizemos que \hat{f} é simples se X se contrai em $[X^+ \setminus Y^+]^-$.*

Bertrand (2005) prova a seguinte proposição.

Proposição 1 (Caracterização local) *Uma face principal de um complexo X é simples se e somente se ela é regular.*

Note que a extração de núcleos críticos (uma etapa da sequência $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ descrita acima) pode ser feita por um apagamento paralelo de células regulares, já que a caracterização de uma célula regular é baseada somente na informação local e não depende das características de nenhuma outra célula. Por consequência, algoritmos paralelos de afinamento homotópico podem ser derivados deste *framework*. Com a ajuda do formalismo acima, tais algoritmos são facilmente comprovados como corretos. Além disso, a complexidade de tais algoritmos, para o processo completo de afinamento, podem também ser lineares. Para mais detalhes neste assunto, e para um bom número de algoritmos baseados neste *framework*, consulte por favor as referências (Bertrand e Couprie, 2006a,b,c).

Bertrand e Couprie vão mais longe neste paradigma. Como os núcleos críticos de um 2-complexo puro não são sempre um 2-complexo puro (isto pode ser visto na Figura 3.22), e recordando o mapeamento ilustrado na Figura 3.17, vemos que o esqueleto resultante do afinamento baseado em núcleos críticos não é representável no espaço original da imagem. Para lidar com este problema, Bertrand e Couprie (2006b) definem os *núcleos cruciais*. Ao associar 2-faces com os pixels no 2D, é feita uma ligação entre os complexos e a topologia digital.

No entanto, nesta tese estivemos interessados em esqueletos finos, representados em uma resolução aumentada, portanto os núcleos críticos são suficientes. Usamos a grade proposta originalmente por Khalimsky et al. (1990).

3.7 Breve observação conclusiva

Neste capítulo motivamos e anunciamos as contribuições principais desta tese no tema dos esqueletos Euclidianos. Não demos nenhum detalhe pois estes serão apresentados nos Capítulos 4 e 5, que são, cada um, o texto completo de artigos com densa informação. Este capítulo introdutório tem o objetivo de auxiliar na compreensão do que segue.

No Capítulo 5 apresentamos uma contribuição original que explora informações geométricas de um objeto no espaço de Khalimsky. Um objeto em tal espaço pode ser representado em \mathbb{Z}^n , tal que o objeto representado seja uma expansão do objeto original em uma grade \mathbb{Z}^n de resolução duplicada. Introduzimos o esqueleto Euclidiano homotópico baseado em núcleos críticos e guiado pela transformação de distância Euclidiana do objeto em resolução aumentada.

Note que esta forma de se guiar o processo de afinamento produz um esqueleto centrado com respeito à métrica Euclidiana. Se o eixo mediano for usado como restrição, a reversibilidade também é assegurada. Como discutiremos no Capítulo 5, o mais razoável dentre as abordagens imediatas é o uso, como conjunto restritivo, do complexo obtido a partir do eixo mediano Euclidiano exato extraído do objeto original. Já que o esqueleto resultante será representado no espaço de Khalimsky, propomos um método para extrair um eixo mediano na grade de resolução duplicada, e definimos o *Eixo Mediano Euclidiano em Resolução Aumentada* (HMA). O HMA é apresentado no Capítulo 4, com algoritmos e provas, e é também uma das contribuições principais desta tese.

Chapter 4

Discrete 2D and 3D Euclidean Medial Axis in Higher Resolution

Este capítulo apresenta o conteúdo completo do artigo “Discrete 2D and 3D Euclidean Medial Axis in Higher Resolution”, submetido para o periódico *Image and Vision Computing* (Saúde et al., 2007). Uma versão preliminar deste artigo (Saúde et al., 2006b) foi publicada nos anais do 13th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery - DGCI’2006.

Abstract

The notion of skeleton plays a major role in shape analysis. Some usually desirable characteristics of a skeleton are: sufficient for the reconstruction of the original object, centered, thin and homotopic. The Euclidean Medial Axis presents all these characteristics in a continuous framework. In the discrete case, the MA is also sufficient for reconstruction and centered. It no longer preserves homotopy but it can be combined with a homotopic thinning to generate homotopic skeletons. The thinness of the MA, however, may be discussed. In this paper we present the definition of the Exact Euclidean Medial Axis on Higher Resolution which has the same properties as the MA but with a better thinness characteristic, against the price of rising resolution. We provide an efficient algorithm to compute it.

Keywords: medial axis, skeleton, Euclidean distance

4.1 Introduction

In 1961, Blum (1961) introduced the notion of medial axis or skeleton, which has since been the subject of numerous theoretical studies and has also proved its usefulness in practical applications. Although originally defined in the continuous plane using a “grassfire” analogy, the medial axis can also be defined using the notion of maximal inscribed ball. Consider a subset X (called object) of a metric space. The medial axis of X is the set composed by the centers of the maximal balls for X , that is, the balls which are included in X but which are not included in any other ball included in X .

The medial axis can be defined using the same terms in the n -dimensional discrete grid \mathbb{Z}^n . The discrete medial axis is a set of points which is, by nature, centered in the object with respect to the distance which is used to define the notion of ball. To achieve a certain degree of rotation invariance, the Euclidean distance between points of \mathbb{Z}^n may be used. Nevertheless even in this case, the medial axis has not, in general, the same nice properties as its continuous counterpart. In particular, the properties of thinness and homotopy are lost (see for example Figure 4.1, where the medial axis is “two-pixels thick” in some places, and has not the same number of connected components as the original object).

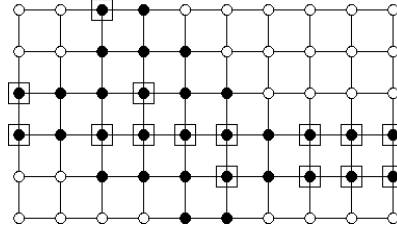


Figure 4.1: Thick medial axis. The object $X \subset \mathbb{Z}^2$ is depicted in black. The squares mark the points of the medial axis, based on the Euclidean distance.

Topological aspects are out of the scope of this paper. Nevertheless, let us mention that in order to obtain an homotopic skeleton which contains the medial axis, the use of guided and constrained discrete homotopic transformations has been proposed by several authors (see *e.g.* Couprie et al., 2006a; Davies and Plummer, 1981; Talbot and Vincent, 1992).

On the other hand, the problem of thickness of the skeleton has been tackled in different ways. Some authors use an asymmetric thinning step in order to reduce

two-pixel thick configurations. But in this case, the result cannot be considered anymore as centered with respect to the original object. Furthermore the property of reconstruction is lost. In order to get a thin medial axis while preserving centeredness (in the sense of the so-called 8-distance), Bertrand (1984) introduced the notion of derived grid. Also, in the study of discrete topology-preserving transformations, several recent works promote the use of the Khalimsky grid or its variations (Bertrand, 1999; Bertrand and Couprie, 2006c; Khalimsky et al., 1990; Kong et al., 1991; Kovalevsky, 1989). From a geometrical point of view, the Khalimsky grid \mathbb{H}^n associated to \mathbb{Z}^n can be embedded in $[\frac{1}{2}\mathbb{Z}]^n$, that is, by doubling the resolution of the grid for each dimension. Starting from an initial object in \mathbb{Z}^n , a “model” of this object in \mathbb{H}^n can be computed and then thinned by a symmetrical algorithm (Bertrand, 1999), producing a result which is both centered and thin.

The drawback of the above approaches lies in their sensitivity to rotations. Since they implicitly or explicitly rely on the 4- or 8-distance, the skeletons can be quite different for an object and its rotation by, say, $\pi/4$. Our aim in this paper is to provide a notion of medial axis in a doubled resolution grid, based on the Euclidean distance, and an efficient algorithm to compute it. In addition to the Euclidean balls centered on points of \mathbb{Z}^n , we will also consider the balls centered on points of $[\frac{1}{2}\mathbb{Z}]^n$ (see Figure 4.2).

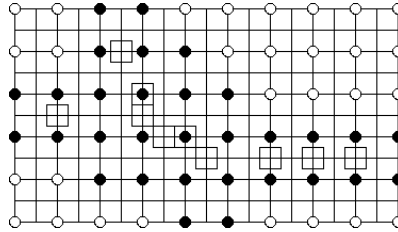


Figure 4.2: The medial axis of X in the doubled resolution grid (squares).

Dealing with the Euclidean distance in \mathbb{Z}^n is far from easy. Many algorithms found in the literature only compute approximations of the Euclidean distance transform (*e.g.* Danielsson, 1980) or medial axis (*e.g.* Meyer, 1979). A simple to implement, optimal algorithm for building exact Euclidean distance maps was proposed only in 1996 (Hirata, 1996; Meijster et al., 2000; Saito and Toriwaki, 1994a), and efficient algorithms to compute exact Euclidean medial axes were not known before 2003 (Cœurjolly, 2003; Rémy and Thiel, 2003, 2005). In this paper, we deal with exact notions and provide proofs of the proposed algorithms.

Let us briefly and informally sketch the proposed method. First, rather than using the grid $[\frac{1}{2}\mathbb{Z}]^n$, we transform the original object X by doubling the coordinates of all its points and consider the grid \mathbb{Z}^n as the doubled resolution grid. This choice leads to simpler notations and proofs. Then, we consider the set X_h composed of all the points of \mathbb{Z}^n which are in the neighborhood of a point of X (scaled). We compute the exact squared Euclidean distance map of X_h using a linear-time algorithm (Hirata, 1996; Saito and Toriwaki, 1994a). Finally, we propose an efficient algorithm to extract the higher resolution medial axis of X from this distance map in 2D and 3D. This algorithm is based on the same idea as the one proposed by Rémy and Thiel (2003, 2005) and is also based on pre-computed lookup tables, following the approach originally proposed by Borgefors et al. (1991). The biggest of these tables is indeed shared by Rémy and Thiel's method and ours. Obtaining a medial axis for an object X from a distance map relative to a different object X_h is not obvious, and we present several intermediate properties to establish this fact. It should be noted that the naive solution, which consists of doubling the resolution and using the classical Euclidean medial axis, does not provide a satisfactory result (see Couprie et al., 2006b).

4.2 Basic notions

We denote by \mathbb{Z} the set of integers, and by \mathbb{N} the set of nonnegative integers. Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, we denote by \bar{X} the complementary of X . We denote by $(y - x)^2$ the squared Euclidean distance between two points $x \in \mathbb{Z}^n$ and $y \in \mathbb{Z}^n$.

Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, the *squared Euclidean distance transform* of X , denoted by D_X^2 , associates to each point $x \in X$ its squared Euclidean distance to the nearest point in \bar{X} :

$$D_X^2(x) = \min\{(y - x)^2, y \in \bar{X}\}$$

Let x be a point in \mathbb{Z}^n and let R be a positive integer. The set of points y of \mathbb{Z}^n such that $(y - x)^2 = R$ will be of particular interest in what follows. Each such point y corresponds to a decomposition of R into a sum of n square integers. We introduce some notations to deal with sum of squares decompositions of integers.

Definition 8 (Sum of squares Decomposition) Let $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{N}$, the n -uple $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n$ is a (sum of squares) n -decomposition of R if

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n \geq 0 \text{ and } (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) = R$$

We denote by $SQD_n(R)$ the set of all n -decompositions of R .

There are other decompositions of R into the sum of n squares, satisfying only the second condition of Definition 8. They may be obtained from the above decompositions by permutations and sign changes.

Let \mathbb{D}_n denote the set of n -decomposable integers, in other words, $\mathbb{D}_n = \{R \in \mathbb{N} \mid \text{SQD}_n(R) \neq \emptyset\}$. It is known that for any $n \geq 4$, $\mathbb{D}_n = \mathbb{N}$ (Lagrange's theorem, see Hardy and Wright, 1978, Section 20.5). Observe that $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{D}_3 \subset \mathbb{D}_4 = \mathbb{N}$ (the inclusions are strict).

Let $R \in \mathbb{N}$, we define:

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \min\{\delta \in \mathbb{D}_n \mid \delta \geq R\}; & R^+ &= \overline{R} + 1 \\ \underline{R} &= \max\{\delta \in \mathbb{D}_n \mid \delta \leq R\}; & R^- &= \underline{R} - 1 \end{aligned}$$

Table 4.1 illustrates the sum of squares decompositions and the above notations.

$R \in \mathbb{N}$	2D					3D				
	$\text{SQD}_2(R)$	\overline{R}	R^+	\underline{R}	R^-	$\text{SQD}_3(R)$	\overline{R}	R^+	\underline{R}	R^-
...										
17	$\{(4, 1)\}$	17	18	17	16	$\{(4, 1, 0), (3, 2, 2)\}$	17	18	17	16
18	$\{(3, 3)\}$	18	20	18	17	$\{(4, 1, 1), (3, 3, 0)\}$	18	19	18	17
19	\emptyset	20	20	18	18	$\{(3, 3, 1)\}$	19	20	19	18
20	$\{(4, 2)\}$	20	25	20	18	$\{(4, 2, 0)\}$	20	21	20	19
21	\emptyset	25	25	20	20	$\{(4, 2, 1)\}$	21	22	21	20
22	\emptyset	25	25	20	20	$\{(3, 3, 2)\}$	22	24	22	21
23	\emptyset	25	25	20	20	\emptyset	24	24	22	22
24	\emptyset	25	25	20	20	$\{(4, 2, 2)\}$	24	25	24	22
25	$\{(5, 0), (4, 3)\}$	25	26	25	20	$\{(5, 0, 0), (4, 3, 0)\}$	25	26	25	24

Table 4.1: Illustration of some n -decompositions.

Let $R \in \mathbb{N}$. Observe that, if $R \in \mathbb{D}_n$ then $\overline{R} = \underline{R} = R$ and $(R^-)^+ = (R^+)^- = R$. In addition, if $R \notin \mathbb{D}_n$ then $\overline{R} = R^+$ and $\underline{R} = R^-$.

Definition 9 (Euclidean Ball) Let $x \in \mathbb{Z}^n$, $R \in \mathbb{N}$, we denote by $B^{\leq}(x, R)$ the Euclidean ball centered in x with (squared) radius R and we denote by $B^{<}(x, R)$ the Euclidean ball centered in x with (squared) strict radius R , where

$$\begin{aligned} B^{\leq}(x, R) &= \{y \in \mathbb{Z}^n, (x - y)^2 \leq R\} \\ B^{<}(x, R) &= \{y \in \mathbb{Z}^n, (x - y)^2 < R\} \end{aligned}$$

Note that we have the following equalities, for all x, R :

$$\begin{aligned} B^{\leq}(x, R) &= B^{<}(x, R^+) \\ B^{<}(x, R) &= B^{\leq}(x, R^-) \end{aligned}$$

Definition 10 (Maximal Ball) Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, $x \in X$, $R \in \mathbb{N}$,

A ball $B^{<}(x, R) \subseteq X$ is the greatest inside ball for x in X if it is the largest ball centered in x and included in X , i.e., $\forall R' \in \mathbb{N}$,

$$B^{<}(x, R) \subseteq B^{<}(x, R') \subseteq X \Rightarrow B^{<}(x, R) = B^{<}(x, R'); \quad (4.1)$$

A ball $B^{<}(x, R) \subseteq X$ is a maximal ball for X if it is not strictly included in any other ball included in X , i.e., $\forall R' \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}^n$,

$$B^{<}(x, R) \subseteq B^{<}(y, R') \subseteq X \Rightarrow B^{<}(x, R) = B^{<}(y, R') \quad (4.2)$$

Proposition 2 Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, $x \in X$ and $R \in \mathbb{D}_n$. The ball $B^{<}(x, R)$ is the greatest inside ball for x in X if and only if $R = D_X^2(x)$.

PROOF It is known that $R = D_X^2(x)$ implies that $B^{<}(x, R)$ is the greatest inside ball for x in X (see e.g. Rémy and Thiel, 2005). Conversely, suppose that $B^{<}(x, R)$ is the greatest inside ball for x in X . Suppose now that $R < D_X^2(x)$, and let $R' = D_X^2(x)$, we have $B^{<}(x, R) \subseteq B^{<}(x, R') \subseteq X$ and since $R \in \mathbb{D}_n$ and $R' \in \mathbb{D}_n$, $B^{<}(x, R) \neq B^{<}(x, R')$ in contradiction with (4.1). On the other hand, if $R > D_X^2(x)$ we see that $B^{<}(x, R)$ cannot be included in X . Thus $R = D_X^2(x)$. \square

Observe that, if $B^{<}(x, R)$, with $R \in \mathbb{N}$, is maximal for X , then it is the greatest inside ball for x in X . Now let us recall the definition of the medial axis (Blum, 1961).

Definition 11 (Medial Axis) Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, the medial axis of X , denoted by $MA(X)$, is the set of the centers of all the maximal balls for X . In other words, $MA(X) = \{x \in X, B^{<}(x, D_X^2(x)) \text{ is maximal for } X\}$.

4.3 Euclidean medial axis in higher resolution

The goal of changing resolution is to extract a medial axis of the object X by considering a new family of Euclidean balls which are not necessarily centered on points of X . More precisely, we also take into account Euclidean balls centered

on the vertices of a doubled resolution grid. For simplicity, instead of considering half integers for the coordinates in the higher resolution grid, we begin by doubling coordinates of the original object. Thus \mathbb{Z}^n is used as the higher resolution grid, and the points with only even coordinates constitute the support of the scaled original image.

Definition 12 Let $i \in \{0 \dots n\}$. We define the set $E_i \subset \mathbb{Z}^n$ as the set of elements in \mathbb{Z}^n with exactly i even coordinates, more precisely $E_i = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n, \sum_{j=1}^n ((z_j + 1) \bmod 2) = i\}$.

Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, we write $E_i(X) = E_i \cap X$. Observe that the family $\{E_i\}_{i=0..n}$ forms a partition of \mathbb{Z}^n , i.e.,

$$\bigcup_{i=0..n} E_i = \mathbb{Z}^n \text{ and } \forall i, j \in \{0 \dots n\}, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$$

Definition 13 (Neighborhood) Let $x \in \mathbb{Z}^n$, we define the neighborhood of x as the set $N_n(x) = \{y \in \mathbb{Z}^n \mid \max_{i=1 \dots n} |y_i - x_i| \leq 1\}$. Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, we define the set $N_n(X) = \bigcup_{z \in X} N_n(z)$.

Definition 14 Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, we define $\phi(X)$ and $\phi^{-1}(X)$ by

$$\phi(X) = \{2z, z \in X\} ; \quad \phi^{-1}(X) = \{z, 2z \in X\}$$

Note that for any subset X of \mathbb{Z}^n , $\phi(X) \subseteq E_n$.

We introduce the following transformation which allows us to associate, to an object X , a corresponding object in the higher resolution grid.

Definition 15 (H-transform) Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, the H -transform of X , denoted by $\mathcal{H}(X)$, is defined by

$$\mathcal{H}(X) = N_n(\phi(X))$$

Figure 4.3 illustrates the H -transform of a set in \mathbb{Z}^2 . Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, observe that $\phi(X) \subseteq E_n$, that $\phi^{-1}(\phi(X)) = X$ and that $E_n(\mathcal{H}(X)) = \phi(X)$, hence $\phi^{-1}(E_n(\mathcal{H}(X))) = X$. The following proposition is elementary.

Proposition 3 The H -transform is increasing, i.e., for each $A, B \subset \mathbb{Z}^n$, $A \subset B \Rightarrow \mathcal{H}(A) \subset \mathcal{H}(B)$.

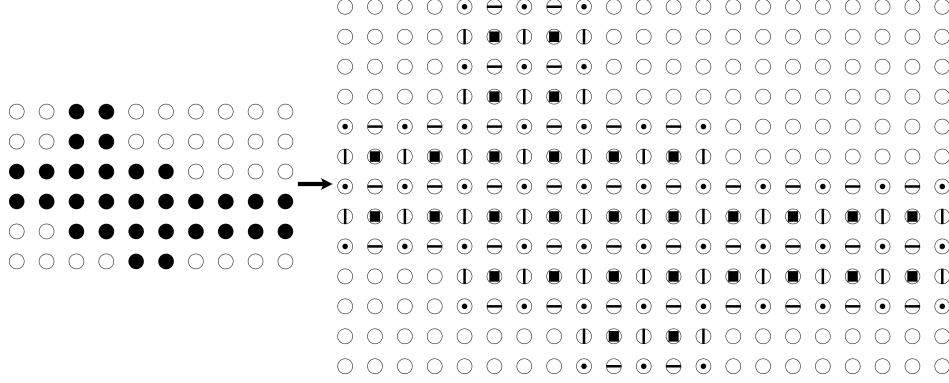


Figure 4.3: H -transform of a set in \mathbb{Z}^2 . On the left, the set X (in black), and on the right, the set $\mathcal{H}(X)$. Elements of $\mathcal{H}(X)$ are marked based on the sets of the partition: E_0 (with a dot), E_1 (with a vertical or horizontal line) and E_2 (with a square).

4.3.1 An important proposition

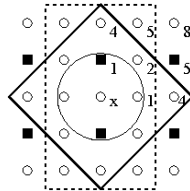
Before stating the next proposition, we need to introduce the following notion.

Definition 16 (E_n -tight) Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, $x \in X$, $R \in \mathbb{D}_n$. The ball $B^{\leq}(x, R)$ is said to be E_n -tight if there is no n -decomposable integer $R' < R$ such that $E_n(B^{\leq}(x, R')) = E_n(B^{\leq}(x, R))$.

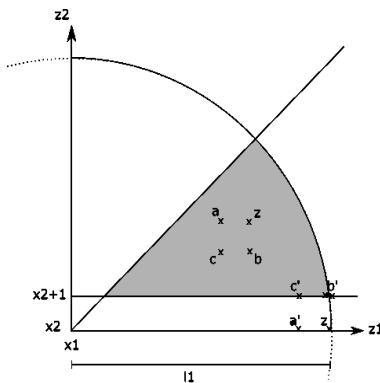
It can easily be seen that $B^{\leq}(x, R)$ is E_n -tight if and only if there exists $y \in E_n(B^{\leq}(x, R))$ such that $(x - y)^2 = R$. The following proposition will play an important role to prove the algorithms that we are going to propose. Put briefly, it says that any E_n -tight ball B is included in $N_n(E_n(B))$.

Proposition 4 Let $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 3$. Let $B = B^{\leq}(x, R)$, where $x \in \mathbb{Z}^n$ and $R \in \mathbb{D}_n$, be an E_n -tight ball. For any $z \in B$, there exists a point $w \in N_n(z)$ such that $w \in E_n(B)$, i.e., $B \subseteq N_n(E_n(B))$.

Although this proposition may seem simple, it is in fact false in general but true at least in dimensions 2 and 3. Furthermore, the counter-example of Figure 4.4 shows that the condition “ E_n -tight” is indeed necessary for the proposition. With this proposition, we will be able to justify our algorithms, and the practical applications are mostly in dimensions 2 and 3.



First, let us suppose that $z_2 - x_2 \geq 1$. Let $a = (z_1 - 1, z_2)$, $b = (z_1, z_2 - 1)$ and $c = (z_1 - 1, z_2 - 1)$.



It can easily be seen (Figure 4.5) that a , b and c are in B , furthermore at least

one of a, b, c or z belongs to E_n . Let w be this point, we have $w \in E_n(B) \cap N_n(z)$. Now take the case $z_2 - x_2 = 0$. Let $l_1 = z_1 - x_1$, let $r = R - 1$ and let $a' = (z_1 - 1, z_2)$, $b' = (z_1, z_2 + 1)$, $c' = (z_1 - 1, z_2 + 1)$. If $l_1^2 \leq r$, then, by elementary geometry, it can be seen that $b' \in B$, and we have the same argument as in the previous case, with the points a', b', c', z (see Figure 4.5). Otherwise, we have $r = R - 1 < l_1^2 \leq R$, thus $l_1^2 = R$ and $b' \notin B$. If $a' \in E_n$ or $c' \in E_n$ or $z \in E_n$ then we are done, suppose that it is not the case, thus b' must be in E_n . It implies that z_2 and x_2 are odd and z_1 is even. By hypothesis, $\exists y \in E_n(B)/(x - y)^2 = R = l_1^2$. Since x_2 is odd and $y \in E_n$, then $x_2 - y_2$ is odd. Let us examine the possible cases. Case 1: l_1 is even; since z_1 is even, x_1 must also be even, so $x_1 - y_1$ is even; thus we have a contradiction because $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = l_1^2$ and the sum of an even number and an odd number cannot be even. Case 2: l_1 is odd; in this case x_1 must be odd, so $x_1 - y_1$ is odd; thus we have a contradiction because the sum of two odd numbers cannot be odd. \square

No proof has been done for Proposition 4 in dimensions higher than 3. We do not know the dimension until which this proposition remains true. However, it is easy to find counter-examples in dimensions higher or equal to 9: the simplest one is based on the decomposition $3^2 = 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$. Using the same notations as above, take $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $z = (4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, and $y = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. It can be seen that any neighbor of z which is in $B^{\leq}(x, 9)$ has an odd first coordinate, and thus does not belong to E_n .

4.3.2 E_n -balls and higher resolution medial axis

For any $x \in \mathbb{Z}^n$, $R \in \mathbb{D}_n$, the set $E_n(B^<(x, R))$ is called an E_n -ball, it can be seen as an Euclidean ball in E_n which is centered in any point of \mathbb{Z}^n (not necessarily in E_n). E_n -balls may have different symmetry characteristics depending on where they are centered. Some E_n -balls are illustrated in Figure 4.6 for \mathbb{Z}^2 .

Definition 17 (Maximal E_n -balls) Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, $x \in X$, $R \in \mathbb{N}$,

An E_n -ball $E_n(B^<(x, R)) \subseteq X$ is the greatest inside E_n -ball for x in X if it is the largest E_n -ball centered in x and included in X , i.e., $\forall R' \in \mathbb{N}$,

$$E_n(B^<(x, R)) \subseteq E_n(B^<(x, R')) \subseteq X \Rightarrow E_n(B^<(x, R)) = E_n(B^<(x, R')); \quad (4.3)$$

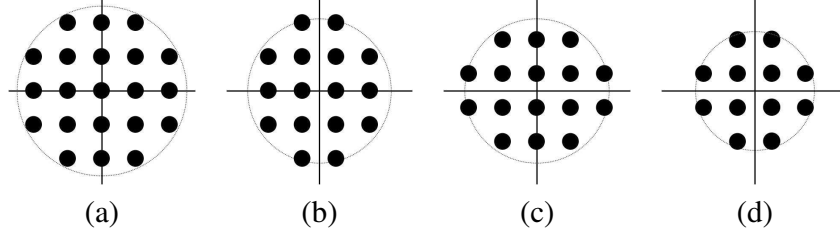


Figure 4.6: E_n -balls in \mathbb{Z}^2 . Only points of E_2 are represented. (a) E_n -ball centered in E_2 , (b) and (c) E_n -balls centered in E_1 , (d) E_n -ball centered in E_0 .

An E_n -ball $E_n(B^<(x, R)) \subseteq X$ is a maximal E_n -ball for X if it is not strictly included in any other E_n -ball included in X , i.e., $\forall R' \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}^n$,

$$E_n(B^<(x, R)) \subseteq E_n(B^<(y, R')) \subseteq X \Rightarrow E_n(B^<(x, R)) = E_n(B^<(y, R')) \quad (4.4)$$

Now we can define the HMA, built on the same model as MA, but using maximal E_n -balls instead of maximal balls.

Definition 18 (HMA) Let $X \subset \mathbb{Z}^n$. The higher resolution medial axis $HMA(X)$ is the set of centers of all maximal E_n -balls for $\mathcal{H}(X)$.

The problem of extracting the HMA is to find the set of maximal E_n -balls for the object. Knowing the radii of the greatest inside E_n -balls for each point is necessary to test maximality for the object. Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, $X_h = \mathcal{H}(X)$, $x \in X_h$, in nD the radius of the greatest inside E_n -ball for x can be obtained from $D_{X_h}^2(x)$ by looking for the first integer $R \geq D_{X_h}^2(x)$ such that $x + v \in E_n(\overline{X_h})$, with v being any vector satisfying $v^2 = R$. However, in 2D and 3D, we can avoid such iterations, based on the following proposition, which ensures that $D_{X_h}^2(x)$ is precisely the radius of the greatest inside E_n -ball for x in X_h . It can be proved with the help of Proposition 4.

Proposition 5 Let $n \in \mathbb{N}, n \leq 3$. Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, $X_h = \mathcal{H}(X)$, $x \in X_h$, $R \in \mathbb{D}_n$. If $B^<(x, R)$ is the greatest inside ball for x in X_h , then $E_n(B^<(x, R))$ is the greatest inside E_n -ball for x in X_h .

PROOF If $B^<(x, R)$ is the greatest inside ball for x in X_h , then $R = D_{X_h}^2(x)$ (Proposition 2). Let B_M be the greatest inside E_n -ball for x in X_h . By definition of B_M , we have $E_n(B^<(x, R)) \subseteq B_M$, we are going to prove the converse.

Let $B_h = N_n(B_M)$. Notice that B_h is not a ball in general. Notice also that $E_n(B_h) = B_M$, thus B_M is the greatest inside E_n -ball for x in B_h . We know that $B_M \subseteq E_n(X_h)$, thus $B_h \subseteq X_h$ by Proposition 3. Let $R_M \in \mathbb{D}_n$ be the smallest decomposable integer such that $E_n(B^\leq(x, R_M)) = B_M$. Since R_M is minimal under this constraint, then $B^\leq(x, R_M)$ is E_n -tight and, from Proposition 4, $B^\leq(x, R_M) \subseteq N_n(E_n(B^\leq(x, R_M))) = B_h$. Thus, $\forall y \in \mathbb{Z}^n$, we have $(y - x)^2 \leq R_M \Rightarrow y \in B_h$ and, by negation, $y \in \overline{B_h} \Rightarrow (y - x)^2 > R_M$. Thus, $D_{B_h}^2(x) > R_M$ and $B^\leq(x, R_M) \subseteq B^<(x, D_{B_h}^2(x))$. But $B_h \subseteq X_h$ implies $D_{B_h}^2(x) \leq D_{X_h}^2(x)$, thus $B^<(x, D_{B_h}^2(x)) \subseteq B^<(x, D_{X_h}^2(x))$. Taking the intersection with E_n , we deduce that $B_M = E_n(B^\leq(x, R_M)) \subseteq E_n(B^<(x, D_{X_h}^2(x)))$. \square

4.4 Algorithm to compute the HMA

In this section we present an algorithm to compute the higher resolution medial axis (HMA). Testing if an E_n -ball is maximal for an object is not trivial. One way of doing this is to test if it is not included in another E_n -ball, itself included in X . This can be done by an adaptation of the algorithm presented by Rémy and Thiel (2005) for the extraction of the exact Euclidean medial axis (MA).

Euclidean balls have a number of symmetries that simplify the problem. An Euclidean ball can be reconstructed from only one of its cones (octant in 2D) by retrieving symmetries of each point (or vector) of that cone. We chose the *generator* cone to be the set of vectors $v^g \in \mathbb{Z}^n$ such that $v^g = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \geq 0$. We distinguish two types of symmetries of v^g :

Type 1. A symmetry obtained by setting signs to the coordinates of v^g . It can be obtained by $S_1 v^g$, where S_1 is a matrix in which every element in the diagonal equals 1 or -1 , with 0s everywhere else. A vector in \mathbb{Z}^n has therefore 2^n Type 1 symmetries, which gives 4, 8 and 16 for $n = 2, 3$ and 4 respectively. We denote by S_1^n the set of all Type 1 matrices in n D. We give below an example in 3D of a Type 1 symmetry of v^g obtained by a Type 1 matrix S_1 :

$$S_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, v^g = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, S_1 v^g = \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ -v_3 \end{bmatrix}$$

Type 2. A symmetry obtained by a permutation of the coordinates of v^g . It can be obtained by $S_2 v^g$, where S_2 is a matrix obtained by permuting the rows of an identity matrix according to some permutation of the numbers 1 to

n . Every row and column therefore contains precisely a single 1 with 0s everywhere else. A vector in \mathbb{Z}^n has therefore $n!$ Type 2 symmetries, which gives 2, 6 and 24 for $n = 2, 3$ and 4 respectively. We denote by S_2^n the set of all Type 2 matrices in nD . We give below an example in 3D of a Type 2 symmetry of v^g obtained by a Type 2 matrix S_2 :

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v^g = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, S_2 v^g = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

For the algorithm we are going to present in this section, we need all the combinations of symmetries of Types 1 and 2. Any symmetry of v^g in \mathbb{Z}^n can be obtained by $S_1 S_2 v^g$, $S_1 \in S_1^n$, $S_2 \in S_2^n$. There are therefore $2^n n!$ symmetries in \mathbb{Z}^n , which gives 8, 48 and 384 for $n = 2, 3$ and 4 respectively. We denote by S^n the set of all products $S_1 S_2$, with $S_1 \in S_1^n$, and $S_2 \in S_2^n$.

4.4.1 Algorithm for the medial axis (Rémy and Thiel)

Given a set $X \in \mathbb{Z}^n$ and its squared Euclidean distance transform D_X^2 , the algorithm proposed by Rémy and Thiel (2005) tests, for each point $x \in X$, if the greatest inside ball for x in X , $B^<(x, D_X^2(x))$, is maximal for X . This is done by testing if $B^<(x, D_X^2(x))$ is not included in another ball in X . If the maximal radius of all maximal balls for X is not greater than a previously known radius $R_{max} \in \mathbb{N}$, the inclusion test can be performed efficiently with the help of previously computed lookup tables. These lookup tables are described below and the algorithms to compute them are shortly presented in Section 4.7. See the reference (Rémy and Thiel, 2005) for details.

- Let $X \in \mathbb{Z}^n$, $x \in X$, if the maximal radius of all maximal balls for the set X is not greater than a previously known radius $R_{max} \in \mathbb{N}$, it is possible to precompute a limited set of generator vectors $\mathcal{M}_{R_{max}}^g$ which is sufficient to ensure that, if $\forall v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^g, \forall S \in S^n, B^<(x, D_X^2(x)) \not\subseteq B^<(x + S v^g, D_X^2(x + S v^g))$, then $x \in \text{MA}(X)$. We call $\mathcal{M}_{R_{max}}^g$ the *set of sufficient vectors for the radius R_{max}* .
- Let $x \in \mathbb{Z}^n, v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^g$, for any value of R_{max} , let $R \in \mathbb{D}_n$. The table $\text{Lut}[v^g, R]$ gives the minimal radius $R' \in \mathbb{D}_n$ necessary for having $\forall S \in S^n, B^<(x, R) \subseteq B^<(x + S v^g, R')$. Note that $\text{Lut}[0, R] = R$.

To compute the MA of a set $X \in \mathbb{Z}^n$, it is sufficient to apply the `ISMA` function for every point $x \in X$.

Function `ISMA` (x, R_{max}, D_X^2)

```

// tests if  $x \in \text{MA}(X)$ 
1 foreach  $v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^g$  do
2   foreach  $S \in S^n$  do
3      $v \leftarrow Sv^g$ ;
4      $R_v \leftarrow \text{Lut}[v^g, D_X^2(x)]$ ;
5     if  $D_X^2(x+v) \geq R_v$  then return false;
6 return true;

```

The correctness of Function `ISMA` lies on Propositions 6 and 7, proved in (Rémy and Thiel, 2005).

Proposition 6 *Let $x \in \mathbb{Z}^n, v^g \in \mathcal{M}^g, S \in S^n, v = Sv^g, R \in \mathbb{D}_n, R' \in \mathbb{D}_n$, we have $B^<(x, R) \subseteq B^<(x+v, R') \Leftrightarrow R' \geq \text{Lut}[v^g, R]$.*

Proposition 7 *Let $X \subset \mathbb{Z}^n, x \in X, R_{max} = \max\{D_X^2(z) \mid z \in X\}$. The ball $B^<(x, D_X^2(x))$ is maximal for X if and only if $\forall v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^g, \forall S \in S^n, B^<(x, D_X^2(x)) \not\subseteq B^<(x+v, D_X^2(x+v))$ where $v = Sv^g$.*

4.4.2 Algorithm to extract the HMA

The MA algorithm presented above takes profit of the minimal radii given by the lookup table `Lut`. We need a notion of minimal radius for the E_n -balls.

Definition 19 (E_n -minimal radius) *Let $x \in \mathbb{Z}^n, R \in \mathbb{D}_n, v \in \mathbb{Z}^n$, the E_n -minimal radius relative to x, R and v , denoted by $R^\vee(x, R, v)$, is the strict radius of the smallest ball centered in $x+v$ which includes $E_n(B^<(x, R))$, i.e.,*

$$R^\vee(x, R, v) = \min\{R' \in \mathbb{D}_n, E_n(B^<(x, R)) \subseteq E_n(B^<(x+v, R'))\}$$

The following proposition is elementary.

Proposition 8 *Let $x \in \mathbb{Z}^n, R \in \mathbb{D}_n, R' \in \mathbb{D}_n, v \in \mathbb{Z}^n$,*

$$R' < R^\vee(x, R, v) \Leftrightarrow E_n(B^<(x, R)) \not\subseteq E_n(B^<(x+v, R'))$$

Unlike Euclidean balls in \mathbb{Z}^n , E_n -balls may not be invariant by symmetries of Type 2. Thus the value of $R^\vee(x, R, v)$ depends on to which subset E_i of \mathbb{Z}^n belong the points x and $x + v$. The use of a lookup table with E_n -minimal radii would be prohibitive in terms of storage cost. We propose to calculate $R^\vee(x, R, v)$ on runtime with the Function `EnRmin`.

Function `EnRmin` (x, R, v)

```

// we consider  $S_1 \in S_1^n, S_2 \in S_2^n, v = S_1 S_2 v^g$ , where  $v^g$  is
// the generator of  $v$ 
1  $R_v \leftarrow \text{Lut}[v^g, R]$ ;
2 while  $R_v > 0$  do
3   foreach  $r^g \in \text{SQD}_n(R_v^-)$  do
4     foreach  $S'_2 \in S_2^n$  do
5        $r \leftarrow S_1 S'_2 r^g$ ;
6       if  $((x + v - r) \in E_n)$  and  $((v - r)^2 < R)$  then return  $R_v$ 
7    $R_v \leftarrow R_v^-$ ;
8 return 0

```

We illustrate the Function `EnRmin` with the help of Figure 4.7, which is a partial representation of a set $X_h = \mathcal{H}(X), X \subset \mathbb{Z}^2$. The values on each pixel are the values of $D_{X_h}^2$. The pixels with a circle correspond to the E_2 points. We consider the point x , in the dark gray square, with $R = D_{X_h}^2(x) = 41$. The contour of the maximal ball for x in X_h , $B^<(x, R)$, is marked in dark gray. Considering for instance $v^g = (3, 1)$ and its symmetric $v = (-1, -3)$, the point $x+v$ is the medium gray square with value 85. The Type 1 symmetry which transforms v^g into v is $S_1 = [-1, 0; 0, -1]$. We know that $R_v = \text{Lut}[v^g, 41] = 91$ satisfies $B^<(x, R) \subseteq B^<(x + v, R_v)$. The contour of the ball $B^<(x + v, R_v)$ is represented in light gray and we see that it is not included in X_h . This can also be deduced from the fact that $91 > 85 = D_{X_h}^2(x + v)$. Remark that we have $E_n(B^<(x, R)) \subseteq E_n(B^<(x + v, R_v))$. In line 3 of `EnRmin`, $R_v^- = 9^2 + 3^2 = 90$, and $\text{SQD}_2(R_v^-) = \{(9, 3)\}$, so the `foreach` loop of line 3 executes only with $r^g = (9, 3)$. The `foreach` loop in line 4 executes twice, which is the number of Type 2 symmetries in 2D. In line 5, we will have first $r = (-9, -3)$ and then $r = (-3, -9)$. We see that the points in $B^<(x, R)$ which are the farthest from $x + v$ are in the shaded (very light gray) region, which is the quadrant with signs opposite to the signs of v , then $x + v - r$ gives one of the farthest points of $B^<(x + v, R_v)$ in that quadrant,

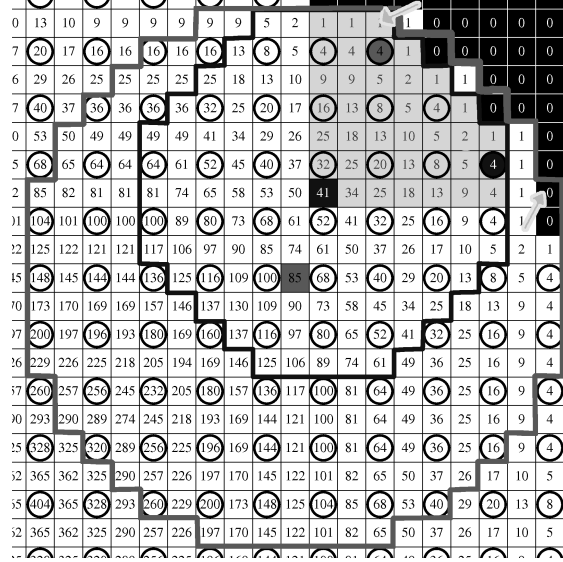


Figure 4.7: Illustration of the EnRmin function. The first coordinate grows from left to right and the second coordinate grows from down to top. The coordinates of the dark gray square with value 41, relative to the medium gray square with value 85 is $v = (-1, -3)$.

$x+v-r-x = v-r$ are its coordinates relative to x , and $(v-r)^2$ is its distance to x . We understand that $(v-r)^2 < R$ tests whether $(x+v-r) \in B^<(x, R)$. The points $x+v-(-9, -3) = x+(8, 0)$ and $x+v-(-3, -9) = x+(2, 6)$ are marked by the arrows. None is in E_2 , so R_v is reduced and the while loop continues. When R_v reaches 89, we have $R_v^- = 85$, $\text{SQD}_2(R_v^-) = \{(9, 2), (7, 6)\}$ and r is $(-9, -2)$, $(-2, -9)$, $(-7, -6)$ or $(-6, -7)$. The points $x+v+(-9, -2) = x+(8, -1)$ and $x+v+(-7, -6) = x+(6, 3)$ are in E_2 , but not in $B^<(x, R)$, so R_v continues to be reduced until $R_v = 74$. Then $R_v^- = 73$ and $\text{SQD}_2(73) = \{(8, 3)\}$. With $r = (-3, -8)$, we have $x+v+(-3, -8) = x+(2, 5)$. Here $x+(2, 5) \in E_2$ and $x+(2, 5) \in B^<(x, R)$ and the function returns $R_v = 74$. Note that the point $x+(2, 5)$, with a light gray disk, is the point of E_2 which is the farthest from $x+v$ in $B^<(x+v, 74)$ but it is not the farthest from x in $B^<(x, R)$. This last one is the point $x+(6, 1)$, marked with the dark gray disk.

Proposition 9 *The value R_v returned by the EnRmin function is equal to $R^v(x, R, v)$.*

PROOF We consider the invariant $I(R_v) = [E_n(B^<(x, R)) \subseteq E_n(B^<(x + v, R_v))]$. The initialization $R_v \leftarrow \text{Lut}[v^g, R]$ sets $I(R_v)$ to true, because, by Proposition 6, we have $B^<(x, R) \subseteq B^<(x + v, R_v)$. By negation of Proposition 8, we see that $R_v \geq R^\vee(x, R, v)$. The *if* clause guarantees that R_v is reduced only if $I(R_v)$ remains true. Thus the algorithm stops when $E_n(B^<(x, R)) \not\subseteq E_n(B^<(x + v, R_v^-))$ and from Proposition 8 we deduce that $R_v^- < R^\vee(x, R, v)$. As post-condition we have $R_v^- < R^\vee(x, R, v) \leq R_v$. But $R_v^- < R_v$, which means that $R^\vee(x, R, v) = R_v$. \square

In Section 4.5 we give a practical analysis of the behaviour of EnRmin .

Now we need to construct a table \mathcal{M}^h , which gives the set of vectors sufficient to compute the HMA. The construction of this table is done by the `BuildMhLut` procedure presented in Section 4.7. This procedure, similar to the one of Rémy and Thiel (2005) to compute \mathcal{M}^g , is based on the observation that if $\mathcal{M}_{R_{max}}^h$ is sufficient to extract, from any ball with a radius less or equal to R_{max} , a medial axis which is reduced to a single point, then $\mathcal{M}_{R_{max}}^h$ enables to correctly extract the HMA from any squared distance map which values do not exceed R_{max} .

By construction of \mathcal{M}^h and as a consequence of Propositions 5, 8 and 9, we have the two following propositions.

Proposition 10 *Let $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^n$, $v^g \in \mathcal{M}^h$, $S \in S^n$, $v = Sv^g$, $R \in \mathbb{N}$, $R' \in \mathbb{N}$. We have*

$$E_n(B^<(x, R)) \subseteq E_n(B^<(x + v, R')) \Leftrightarrow R' \geq \text{EnRmin}(x, R, v)$$

Proposition 11 *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 3$. Let $X \subset \mathbb{Z}^n$, $X_h = \mathcal{H}(X)$, $x \in X_h$, $R_{max} = \max\{D_{X_h}^2(x'), x' \in X_h\}$. The E_n -ball $E_n(B^<(x, D_{X_h}^2(x)))$ is maximal for X_h if and only if*

$$\begin{aligned} &\forall v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^h, \forall S \in S^n, \\ &E_n(B^<(x, D_{X_h}^2(x))) \not\subseteq E_n(B^<(x + v, D_{X_h}^2(x + v))), \text{ where } v = Sv^g \end{aligned}$$

We conclude from Proposition 10 and Proposition 11 that, given a set $X \subset \mathbb{Z}^n$, the computation of $\text{HMA}(X)$ may be done by the computation of the IsHMA function (see bellow) for every point $x \in \mathcal{H}(X)$. Note the direct use of $D_{X_h}^2$, valid only in 2D and 3D, thanks to Proposition 5. As stated in Section 4.3, one could transform the IsHMA function in order to get valid results in any dimension, at the price of some additional computation.

Function `ISHMA` ($x, R_{max}, D_{X_h}^2$)

```

// tests if  $x \in \text{HMA}(X)$  in  $\mathbb{Z}^n$ ,  $X_h = \mathcal{H}(X)$ 
1 foreach  $v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^h$  do
2   foreach  $S \in S^n$  do
3      $v \leftarrow Sv^g$ ;
4      $R_v \leftarrow \text{EnRmin}(x, D_{X_h}^2(x), v)$ ;
5     if  $D_{X_h}^2(x + v) \geq R_v$  then return false
6 return true

```

We have seen that the number of iterations of Function `EnRmin` increases as the size of the analyzed balls increases. Thus, in order to ameliorate the performance of Function `ISHMA`, one can reduce the number of iterations of `EnRmin` inside the `for` loop, as does the `ISHMAEnhanced` function. The `EnRmin` function with parameter $v = 0$ (called in line 1 of `ISHMAEnhanced`) can be implemented as a special case, to be more efficient.

Function `ISHMAEnhanced` ($x, R_{max}, D_{X_h}^2$)

```

// tests if  $x \in \text{HMA}(X)$  in  $\mathbb{Z}^n$ ,  $X_h = \mathcal{H}(X)$ 
1  $R_x = \text{EnRmin}(x, D_{X_h}^2(x), 0)$ ;
2 foreach  $v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^h$  do
3   foreach  $S \in S^n$  do
4      $v \leftarrow Sv^g$ ;
5      $R_v \leftarrow \text{EnRmin}(x, R_x, v)$ ;
6     if  $D_{X_h}^2(x + v) \geq R_v$  then return false
7 return true

```

To efficiently calculate R^+ , R^- for any integer R , another precomputed lookup table is used: the sum of squares decompositions table SQD_n defined in Section 5.1. The computation of such table is very simple in any dimension. We give the algorithm for the 2D case in Section 4.7. Its generalization to nD is straightforward.

Let $R \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^n$, calculations are expressed as follows:

$$\begin{aligned}
\overline{R}: & \quad (\text{while } (\text{SQD}_n(R) = \emptyset) \text{ do } R \leftarrow R + 1;) \\
\underline{R}: & \quad (\text{while } (\text{SQD}_n(R) = \emptyset) \text{ do } R \leftarrow R - 1;) \\
R^+: & \quad (R \leftarrow R + 1; R \leftarrow \overline{R}) \\
R^-: & \quad (R \leftarrow R - 1; R \leftarrow \underline{R})
\end{aligned}$$

4.5 Results

In this section we give some examples of the HMA, comparing it to the MA, in real images, as well as a practical evaluation of the behaviour of our algorithm with respect to computation time.

Figure 4.8 shows an example in 2D and a 3D example is shown in Figure 4.9.

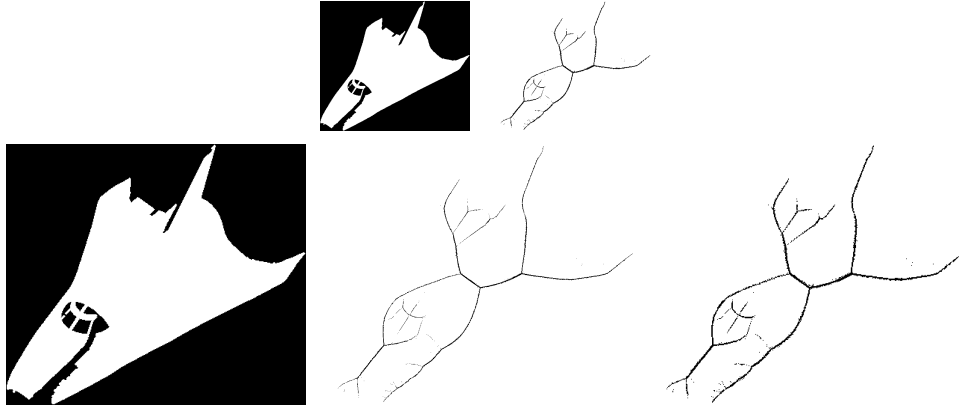


Figure 4.8: 2D HMA example. First row: the original object and its MA; second row from left to right: the object in doubled resolution, its HMA and, for comparison, the MA scaled to a double resolution.

The difference in time complexity between our algorithm and the MA algorithm (see Section 4.4.1), is mainly due to the computation of EnRmin . As a practical evaluation of the computational cost of EnRmin we have generated Euclidean balls with several radii, extracted the HMA, and for each radius, we have caught, during the whole process of the HMA extraction, the maximum number of iterations of EnRmin for all calls to the function. We have plotted the results in Figure 4.10.

As a practical evaluation of the HMA computation time, we have executed MA and HMA on several images similar to those presented in Figuras 4.8 e 4.9

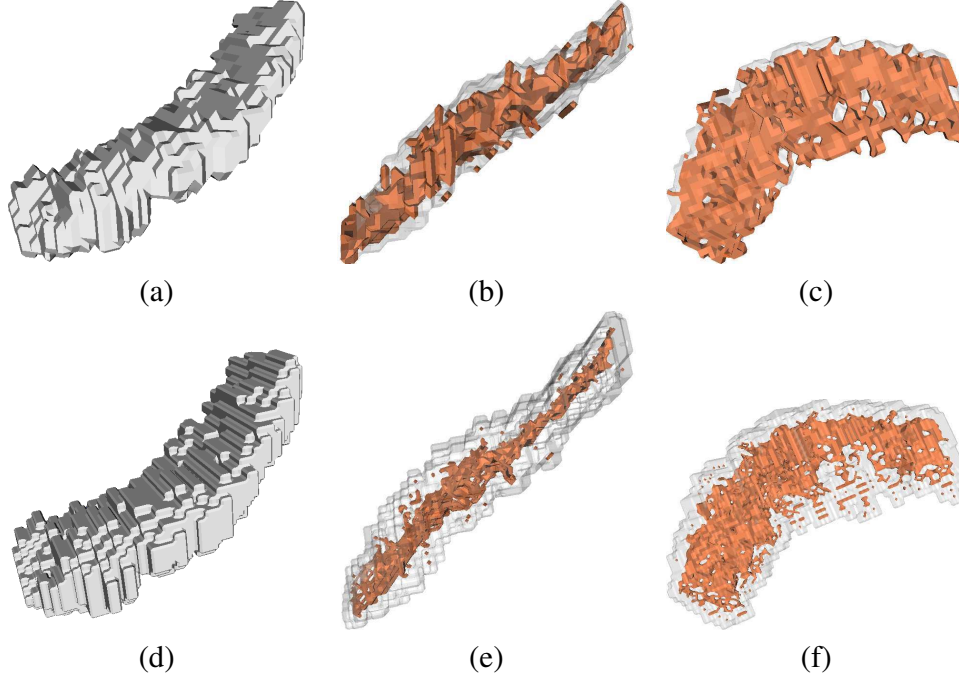


Figure 4.9: 3D HMA examples. Let X be the object, we have (a) 2D projection of X ; (b) and (c) two different views of X (transparent) and $MA(X)$ (opaque). (d) 2D projection of $\mathcal{H}(X)$; (e) and (f) two different views of $\mathcal{H}(X)$ (transparent) and $HMA(X)$ (opaque). Images are scaled for comparison of thinness.

and also on 3D segmentations of a cerebral structure called hippocampus. The estimations were performed on an AMD Athlon XP 2400+, 2.0 GHz, running Linux, without compiler optimizations.

Let X be the object. We measured the times $t(X)$ and $t_h(X)$ for computing $MA(X)$ and $HMA(X)$, respectively.

For the 2D images, we have zoomed the images by factors of 0.5, 1 and 2 in order to have different ball sizes in similar shapes. The object sizes are 12445, 50157 and 112842 pixels. We obtained for $t(X)$: 0.187, 0.426, 0.662 and for $t_h(X)$: 0.487, 1.281, 2.906 (in seconds). The ratios between $t_h(X)$ and $t(X)$ are respectively 2.6, 3.0 and 4.4. The fact that we obtained ratios below four, whereas doubling the resolution multiplies the data volume by four in 2D, is mainly due to the relative cost of loading the lookup tables: this cost is significant for small

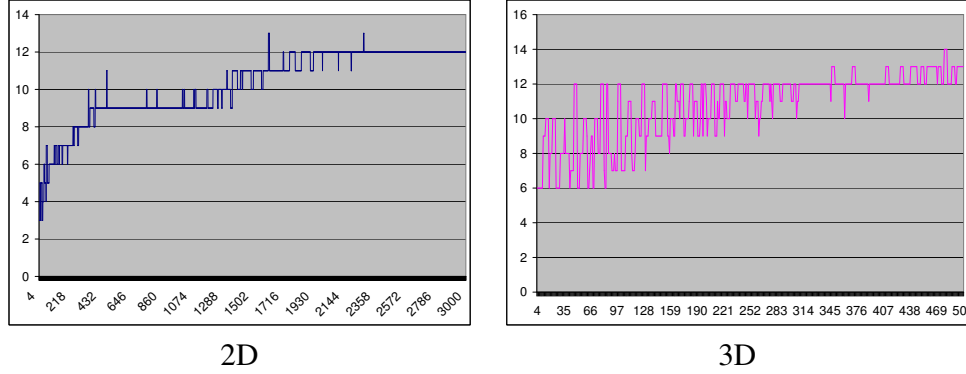


Figure 4.10: Evaluation of EnRmin . The abscissa is the maximum radius (R_{max}) in the image; the values in the ordinates are the maximal number of iterations of EnRmin for the radius R_{max} , counted in the practical evaluation.

images but is better amortized for large images. Notice, however, that only the parts of the lookup tables which are really needed are loaded.

For the 3D images, we used zooming factors of 1, 1.5 and 2, and the object sizes are 3530, 11799 and 24771 voxels. We obtained for $t(X)$: 0.077, 0.148, 0.330, and for $t_h(X)$: 0.422, 2.01, 5.36; hence the ratios: 5.45, 13.5, 16.2. Notice that in 3D, doubling the resolution multiplies the data volume by eight.

We also evaluated and compared the “thinness” of the HMA and the one of the MA. Let us denote by $T(X)$ the ratio: $\text{size}(\text{MA}(X))/\text{size}(X)$, and by $T_h(X)$ the ratio: $\text{size}(\text{HMA}(X))/\text{size}(\mathcal{H}(X))$. In 2D, we obtained for the three zoomed images: $T(X) = 0.091, 0.054, 0.042$, and $T_h(X) = 0.035, 0.022, 0.017$ respectively. In 3D, we obtained for the three zoomed images: $T(X) = 0.33, 0.26, 0.24$, and $T_h(X) = 0.067, 0.072, 0.077$ respectively.

Remark that, even if we compare the size ratios for the MA of X zoomed by a factor 2 and for the HMA, the latter is still significantly lower: 0.054 against 0.035 and 0.042 against 0.022 in 2D, and 0.24 against 0.067 in 3D.

It was interesting to note in the 2D case that the bigger is X , the thinner is $\text{MA}(X)$, and that the HMA offers better improvements for small objects. In 3D, the same observation may be done, and the improvements brought by the HMA are more sensible than in 2D.

4.6 Conclusion and perspectives

We have defined the HMA - the exact Euclidean medial axis in higher resolution in a completely discrete framework. We showed that the HMA presents better thinness characteristics than the classical discrete Euclidean MA. We explained how to compute such axis in n -dimensions and we provided an efficient algorithm to compute it in 2D and 3D. The algorithm has been systematically proved and some results are compared to the MA. We presented a practical evaluation of the algorithm's behaviour in terms of speed. The HMA is based on a transformation to higher resolution which permits the application of further homotopic thinning for the computation of homotopic skeletons. In another paper (Couprie et al., 2006b), we define the notion of a symmetric homotopic skeleton which contains the Euclidean HMA, and provide a parallel algorithm to compute it, based on the framework of critical kernels (see Bertrand and Couprie, 2006c). We also intend to exploit a different approach (see Cœurjolly, 2003) in a future work, in order to obtain an even more efficient algorithm, generalized to n dimensions.

Appendix

4.7 Building the look-up tables

The `BuildSQD2` procedure builds SQD_2 for all integers lower than N . Its generalization to nD is direct.

Procedure `BuildSQD2` (N)

```

1  $n \leftarrow \lceil \sqrt{N} \rceil$ ;
2 for  $i \leftarrow 0$  to  $N$  do  $SQD_2[i] \leftarrow 0$ ;
3 for  $x \leftarrow 0$  to  $n$  do
4   for  $y \leftarrow 0$  to  $x$  do
5      $i \leftarrow x^2 + y^2$ ;
6     if  $i \leq N$  then
7        $SQD_2[i] \leftarrow SQD_2[i] \cup \{(x, y)\}$ 
```

The `BuildMgLut` procedure builds the table $\mathcal{M}_{R_{max}}^g$, supposing we have already the function `calc_MA`(X, \mathcal{M}^g) which calculates $MA(X)$, given \mathcal{M}^g .

Procedure BuildMgLut (R_{max})

```

1  $\mathcal{M}^g \leftarrow \emptyset$ ;
2 for  $R \leftarrow 0$  to  $R_{max}$  do
3    $M \leftarrow \text{calc\_MA}(B^<(0, R), \mathcal{M}^g)$ ;
4   foreach  $x \in M, x \neq 0$  do
5      $\mathcal{M}^g \leftarrow \mathcal{M}^g \cup (x^g, R)$ 

```

The BuildLut procedure builds Lut for $\mathcal{M}_{R_{max}}^g$, supposing we have already $\mathcal{M}_{R_{max}}^g$. It is a compact version of the one given in (Rémy and Thiel, 2005) thanks to the use of the table SQD_n .

Procedure BuildLut (R_{max})

```

1 foreach  $v^g \in \mathcal{M}_{R_{max}}^g$  do
2    $Lut[v^g, 0] \leftarrow 0$ ;
3   for  $R \leftarrow 0$  to  $R_{max} - 1$  do
4      $Lut[v^g, R + 1] \leftarrow Lut[v^g, R]$ ;
5     foreach  $x \in SQD_n(R)$  do
6        $Lut[v^g, R + 1] \leftarrow \max\{Lut[v^g, R + 1], (x + v^g)^2 + 1\}$ ;

```

Finally, the BuildMhLut procedure builds the table $\mathcal{M}_{R_{max}}^g$, supposing we have already the function $\text{calc_HMA}(X, \mathcal{M}^h)$ which calculates $\text{HMA}(X)$, given \mathcal{M}^h .

Procedure BuildMhLut (R_{max})

```

1  $\mathcal{M}^h \leftarrow \emptyset$ ;
2  $R \leftarrow 0$ ;
3 while  $R \leq R_{max}$  do
4   for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do
5     Let  $x \in E_i$ ;
6      $H \leftarrow \text{calc\_HMA}(N_n(B^<(x, R)), \mathcal{M}^h)$ ;
7     foreach  $y \in H, y \neq x$  do
8        $\mathcal{M}^h \leftarrow \mathcal{M}^h \cup ((y - x)^g; R)$ 
9    $R \leftarrow R^+$ ;

```

4.8 Proof of Proposition 4

In this section we extend the proof of Proposition 4 for the 3D case.

Let $z = (z_1, z_2, z_3) \in A$. Without loss of generality, suppose that $z_1 - x_1 \geq z_2 - x_2 \geq z_3 - x_3 \geq 0$.

Case 1. If $z_3 - x_3 \geq 1$ (thus $z_2 - x_2 \geq 1$ and $z_1 - x_1 \geq 1$), then set $a'' = (z_1 - 1, z_2, z_3)$, $b'' = (z_1, z_2 - 1, z_3)$, $c'' = (z_1, z_2, z_3 - 1)$, $d'' = (z_1 - 1, z_2 - 1, z_3)$, $e'' = (z_1 - 1, z_2, z_3 - 1)$, $f'' = (z_1, z_2 - 1, z_3 - 1)$, $g'' = (z_1 - 1, z_2 - 1, z_3 - 1)$. Obviously $a'', b'', c'', d'', e'', f'', g'', z$ are all in A , furthermore at least one of these 8 points belongs to E_n .

Case 2. If $z_3 - x_3 = 0$ and $z_2 - x_2 \geq 1$ (thus and $z_1 - x_1 \geq 1$), then set $a' = (z_1 - 1, z_2, z_3)$, $b' = (z_1, z_2 - 1, z_3)$, $c' = (z_1, z_2, z_3 + 1)$, $d' = (z_1 - 1, z_2 - 1, z_3)$, $e' = (z_1 - 1, z_2, z_3 + 1)$, $f' = (z_1, z_2 - 1, z_3 + 1)$, $g' = (z_1 - 1, z_2 - 1, z_3 + 1)$. It can easily be seen that a', b', d', e', f', g' are all in A , as well as z . If c is also in A or if $\{z, a', b', d', e', f', g'\} \cap E_n \neq \emptyset$ (equivalent to $c' \notin E_n$) then we are done, suppose that $c' \notin A$ and that $c' \in E_n$. From $z \in A$ and $c' \notin A$ we deduce that $(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 \leq R$ and $(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + 1 > R$, thus $(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 = R$.

From our hypothesis, there exists $y \in E_n(A)$ such that $(y - x)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = R$, with y_1, y_2, y_3 all even. From $c' \in E_n$, we deduce that z_1 and z_2 are even, and that z_3 is odd. Since $z_3 - x_3 = 0$, x_3 is also odd.

In all cases, if both x_1 and x_2 are even, or if both x_1 and x_2 are odd, or if one is even and the other is odd, we reach a contradiction (R both even and odd).

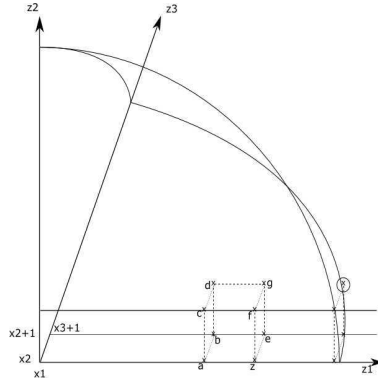


Figure 4.11: Illustration for the proof of Proposition 4 in 3D.

Case 3. If $z_3 - x_3 = z_2 - x_2 = 0$, then set $a = (z_1 - 1, z_2, z_3)$, $b = (z_1 -$

$1, z_2, z_3+1), c = (z_1-1, z_2+1, z_3), d = (z_1-1, z_2+1, z_3+1), e = (z_1, z_2, z_3+1), f = (z_1, z_2+1, z_3-1), g = (z_1, z_2+1, z_3+1)$ (see Figure 4.11). Let $l_1 = z_1 - x_1$, and let $r = R - 2$.

If $l_1^2 \leq r$, then we have the same argument as in case 1, otherwise $r = R - 2 < l_1^2 \leq R$ thus $l_1^2 = R$ or $l_1^2 = R - 1$.

Suppose $l_1^2 = R$: in this case, $\{z, a, b, c, d\} \subset A$ but $\{e, f, g\} \cap A = \emptyset$. If $\{z, a, b, c, d\} \cap E_n \neq \emptyset$ then we are done, suppose $\{z, a, b, c, d\} \cap E_n = \emptyset$.

- if $f \in E_n$ (idem $e \in E_n$): thus z_1 even, $x_2 = z_2$ odd, $x_3 = z_3$ even.

l_1 even $\Rightarrow x_1$ even, thus $(x-y)^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 = R = l_1^2$ means $even + odd + even = even$, a contradiction.

l_1 odd $\Rightarrow x_1$ odd, thus $(x-y)^2 = l_1^2$ means $odd + odd + even = odd$, a contradiction.

- if $g \in E_n$: thus z_1 even, $x_2 = z_2$ odd, $x_3 = z_3$ odd.

l_1 even $\Rightarrow x_1$ even, thus $(x-y)^2 = l_1^2$ is of the form $(2\alpha)^2 + (2\beta+1)^2 + (2\gamma+1)^2 = (2\delta)^2$, which is impossible since the left term is congruent to 2 modulo 4 and the right term is congruent to 0 modulo 4.

l_1 odd $\Rightarrow x_1$ odd, thus $(x-y)^2 = l_1^2$ is of the form $(2\alpha+1)^2 + (2\beta+1)^2 + (2\gamma+1)^2 = (2\delta+1)^2$, which is impossible since the left term is congruent to 3 modulo 4 and the right term is congruent to 1 modulo 4.

Suppose $l_1^2 = R - 1$: in this case, $\{z, a, b, c, d, e, f\} \subset A$ but $g \notin A$. If $\{z, a, b, c, d, e, f\} \cap E_n \neq \emptyset$ then we are done, suppose $\{z, a, b, c, d, e, f\} \cap E_n = \emptyset$. Thus $g \in E_n$, which implies z_1 even, $x_2 = z_2$ odd and $x_3 = z_3$ odd.

- l_1 even $\Rightarrow l_1^2$ even, hence x_1 even and R odd. Thus $(x-y)^2 = R$ means $even + odd + odd = odd$, a contradiction.
- l_1 odd $\Rightarrow l_1^2$ odd, hence x_1 odd and R even. Thus $(x-y)^2 = R$ means $odd + odd + odd = even$, a contradiction.

□

Chapter 5

Euclidean Homotopic Skeleton in 2D and 3D Based on Critical Kernels

Este capítulo apresenta o conteúdo completo do artigo "Euclidean Homotopic Skeleton in 2D and 3D Based on Critical Kernels", submetido ao periódico *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (Couprie et al., 2007). Uma versão preliminar deste artigo (Couprie et al., 2006b) foi publicada nos anais do Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens - SIBGRAPI'2006.

Abstract

Critical kernels constitute a general framework settled in the category of abstract complexes for the study of parallel thinning in any dimension. It allows to easily design parallel thinning algorithms which produce new types of skeletons, with specific geometrical properties, while guaranteeing their topological soundness. In this paper, we demonstrate that it is possible to define a skeleton based on the Euclidean distance, rather than on the common discrete distances, in the context of critical kernels. We provide the necessary definitions as well as an efficient algorithm to compute this skeleton.

Keywords: parallel thinning, Euclidean distance, medial axis, homotopy, critical kernels

Introduction

In 1961, H. Blum (Blum, 1961) introduced the notion of medial axis or skeleton, which has been, since then, the subject of numerous theoretical studies, and has also proved its usefulness in practical applications. Although originally defined in the continuous plane using a “grassfire” analogy, the medial axis of an object can also be defined as the set of the centers of all its maximal inscribed balls, in n -dimensional continuous or discrete spaces (Blum, 1967; Rémy and Thiel, 2005). The medial axis is a set of points which is, by nature, centered in the object with respect to the distance which is used to define the notion of ball. In the discrete n -dimensional grid \mathbb{Z}^n , in order to achieve a certain degree of rotation invariance, the Euclidean distance between points of \mathbb{Z}^n may be used. Nevertheless, even in this case, the medial axis has not, in general, the same nice properties as its continuous counterpart. In particular, the properties of thinness and homotopy (or topology preservation) are lost.

In order to obtain an homotopic skeleton which contains the medial axis, the use of guided and constrained discrete homotopic transformations has been proposed by several authors (see *e.g.* (Couprie et al., 2006a; Davies and Plummer, 1981; Talbot and Vincent, 1992; Vincent, 1991)). Intuitively, the principle of these methods is to sequentially delete simple points (that is, points which can be deleted without changing topology) from the object, taking in first priority the points which are closest to the background, and preserving the medial axis points. These approaches suffer from two drawbacks. First, the result of the method is not uniquely defined: depending on the order in which points with equal priority are processed, different results can be obtained. Second, the obtained skeleton is not thin since it contains the medial axis which can be “thick” at some places. Let us mention that some authors considered higher resolution grids in order to get thinner skeletons (see *e.g.* (Bertrand, 1984; de Souza, 2005)), but none of these works was based on the Euclidean distance.

In order to obtain a skeleton which is uniquely defined, the thinning process must not make any arbitrary choice. More precisely, at each step of the process a set of removable points must be identified based on a criterion applied to each point independently, and these points must be all removed in parallel. The problem of removing points in parallel while preserving topology is a difficult one, and has been studied for more than forty years (Couprie, 2006). Even in the 2D case, for which hundreds of papers have been published, until recently we lacked a clear understanding of the conditions under which such a process preserves topology.

In (Bertrand, 2005), G. Bertrand introduces a general framework for the study

of parallel thinning in any dimension in the context of abstract complexes. Abstract complexes have been promoted in particular by V. Kovalevsky (Kovalevsky, 1989) in order to provide a sound topological basis for image analysis. Intuitively, an abstract (2D cubical) complex is a set made of faces (squares, edges and vertices), each pixel in an image may be associated to a square of a complex. A new definition of a simple point is proposed in (Bertrand, 2005), based on the collapse operation which is a classical tool in algebraic topology and which guarantees topology preservation. Then, the notions of an *essential face* and of a *core* of a face allow to define the *critical kernel* \mathcal{K} of a complex X . The most fundamental result proved in (Bertrand, 2005) is that, if a subset Y of X contains \mathcal{K} , then X collapses onto Y , hence X and Y have the same topology.

The particular case of 2D structures in spaces of two and three dimensions is considered in (Bertrand and Couprie, 2006b); and (Bertrand and Couprie, 2006c) is devoted to the problem of thinning 3D objects in the 3D space. Several new parallel thinning algorithms are proposed in these articles and compared with the existing ones, when possible. For example, one of these new algorithms called AK^2 is proved to preserve the medial axis (defined with the so-called 4-distance) and is invariant with respect to $\pi/2$ rotations, another one called NK^2 produces a result which is proved to contain the medial axis and to be minimal for this property. These algorithms have no equivalent in the literature. Furthermore, the results of the algorithms proposed in (Bertrand and Couprie, 2006b) and (Bertrand and Couprie, 2006c) are well-defined, they do not depend on any arbitrary choice.

With Figure 5.1, we motivate the need for a skeleton based on the Euclidean distance. First, let us notice that the balls for the 4-distance are squares with sides rotated by $\pi/4$ with respect to the main axes (like the rightmost square in Figure 5.1). This explains why the skeleton based on this distance is not invariant by a rotation of $\pi/4$ (see figure). Also, due to the particular shape of these balls, diagonal branches of the skeleton appear, even when they correspond to parts of the contour which are not very salient (see A, B, C, D), whereas more salient features (see X, Y) do not generate any skeleton branch. For comparison, the reader can have a look at Figure 5.12, to see the differences with a skeleton based on the Euclidean distance.

The goal of this paper is to provide a definition and an algorithm for the Euclidean skeleton of a cubical complex. This skeleton should contain the Euclidean medial axis of the original object, thus we also propose a definition of the Euclidean medial axis in the context of cubical complexes embedded in \mathbb{Z}^n . This medial axis can be efficiently computed thanks to an algorithm recently introduced in (Saúde et al., 2006a). We provide in this paper definitions, algorithms

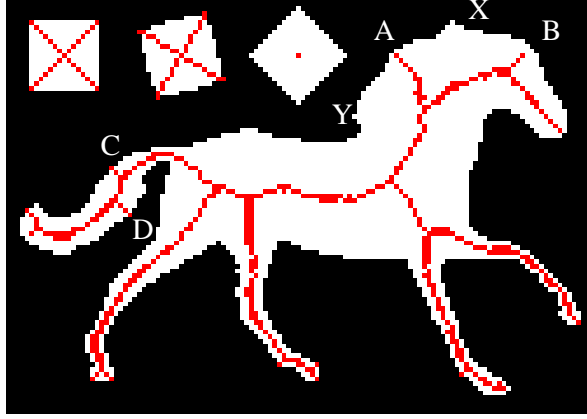


Figure 5.1: Skeleton obtained by the parallel algorithm AK^2 (Bertrand and Couprie, 2006b), this skeleton contains the (4-distance) medial axis of the shape.

and results in both 2D and 3D spaces.

5.1 Complexes

Intuitively, a complex may be thought of as a set of elements having various dimensions (*e.g.* cubes, squares, edges, vertices) glued together according to certain rules. We recall briefly in this section some basic definitions and operations on complexes, see also (Bertrand, 2005; Bertrand and Couprie, 2006b,c) for more details.

Let \mathbb{Z} be the set of integers. We consider the families of sets $\mathbb{F}_0^1, \mathbb{F}_1^1$, such that $\mathbb{F}_0^1 = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{F}_1^1 = \{\{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. A subset f of \mathbb{Z}^n , $n \geq 2$, which is the Cartesian product of exactly m elements of \mathbb{F}_1^1 and $(n-m)$ elements of \mathbb{F}_0^1 is called a *face* or an *m-face* of \mathbb{Z}^n , m is the *dimension of f*, we write $\dim(f) = m$.

Let n be the dimension of the space, in this paper we take $n = 2$ or $n = 3$. We denote by \mathbb{F}^n the set composed of all m -faces of \mathbb{Z}^n , $m = 0, 1, \dots, n$. An m -face of \mathbb{Z}^n is called a *point* if $m = 0$, a *(unit) interval* if $m = 1$, a *(unit) square* if $m = 2$, a *(unit) cube* if $m = 3$.

Let f be a face in \mathbb{F}^n . We set $\hat{f} = \{g \in \mathbb{F}^n \mid g \subseteq f\}$ and $\hat{f}^* = \hat{f} \setminus \{f\}$. Any $g \in \hat{f}$ is a *face of f*, and any $g \in \hat{f}^*$ is a *proper face of f*. If X is a finite set of faces of \mathbb{F}^n , we write $X^- = \cup\{\hat{f} \mid f \in X\}$, X^- is the *closure of X*.

A set X of faces of \mathbb{F}^n is a *cell* or an *m-cell* if there exists an m -face $f \in X$, such that $X = \hat{f}$. The *boundary* of a cell \hat{f} is the set \hat{f}^* .

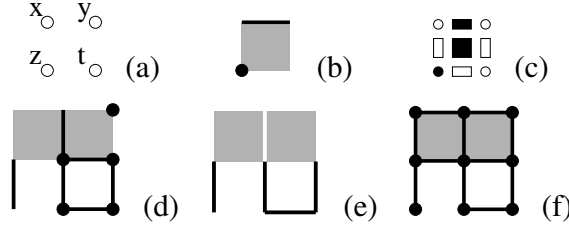


Figure 5.2: (a): Four points x, y, z, t of \mathbb{Z}^2 such that $\{x, y, z, t\}$ is a 2-face. (b,c): Two representations of the set of faces $\{\{x, y, z, t\}, \{x, y\}, \{z\}\}$. (d): A set X of faces in \mathbb{F}^2 , we see that X is not a complex. (e): The set X^+ , composed by the facets of X . (f): The set X^- , i.e. the closure of X , which is a complex.

A finite set X of faces of \mathbb{F}^n is a *complex (in \mathbb{F}^n)* if for any $f \in X$, we have $\hat{f} \subseteq X$. Any subset Y of a complex X which is also a complex is a *subcomplex* of X . If Y is a subcomplex of X , we write $Y \preceq X$.

If X is a complex in \mathbb{F}^n , we also write $X \preceq \mathbb{F}^n$.

A face $f \in X$ is a *facet* of X if there is no $g \in X$ such that $f \in \hat{g}^*$. We denote by X^+ the set composed of all facets of X . If all the facets of X have the same dimension, then we say that X is *pure*.

Observe that $[X^+]^- = X^-$ and thus, that $[X^+]^- = X$ whenever X is a complex. In Figure 5.2, we give some illustrations of the notions defined above.

Let X be a complex in \mathbb{F}^n and let $f \in X^+$. The facet f is a *border face* for X if there exists one face $g \in \hat{f}^*$ such that f is the only face of X which contains g . Such a face g is said to be *free for X* and the pair (f, g) is said to be a *free pair* for X .

The operation of collapse, which is well known in algebraic topology (Giblin, 1981), leads to a notion of homotopy equivalence in discrete spaces, which is the so-called simple homotopy equivalence. To put it briefly, the collapse operation preserves topology.

Let X be a complex, and let (f, g) be a free pair for X . The complex $X \setminus \{f, g\}$ is an *elementary collapse* of X .

Let X, Y be two complexes. We say that X *collapses onto* Y if there exists a *collapse sequence* from X to Y , i.e., a sequence of complexes $\langle X_0, \dots, X_l \rangle$ such that $X_0 = X$, $X_l = Y$, and X_i is an elementary collapse of X_{i-1} , $i = 1, \dots, l$.

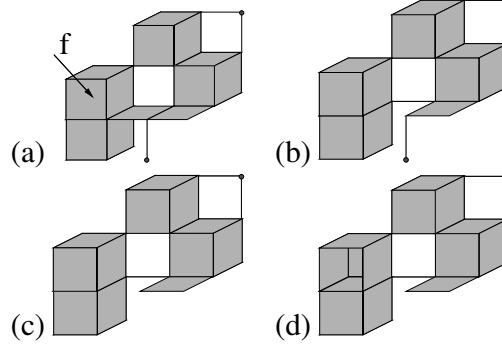


Figure 5.3: (a) A complex X , (b), (c), and (d) three steps of elementary collapse of X .

In Figure 5.3, a 3D complex X is depicted in (a), followed in (b), (c) and (d) by three steps of collapse.

5.2 Critical kernels

Let us briefly recall the framework introduced by one of the authors (in (Bertrand, 2005)) for thinning, in parallel, discrete objects with the warranty that we do not alter the topology of these objects. We focus here on the two- and three-dimensional cases, in fact this method is valid for complexes of arbitrary dimension. This method is based solely on three notions, the notion of an essential face which allows to define the core of a face, and the notion of a critical face.

Definition 20 Let $X \preceq \mathbb{F}^n$ and let $f \in X$. We say that f is an essential face for X if f is precisely the intersection of all facets of X which contain f , i.e., if $f = \cap \{g \in X^+ \mid f \subseteq g\}$. We denote by $Ess(X)$ the set composed of all essential faces of X . If f is an essential face for X , we say that \hat{f} is an essential cell for X .

Observe that a facet of X is necessarily an essential face for X , i.e., $X^+ \subseteq Ess(X)$. The essential 0- and 1-faces of the complex X of Figure 5.4a are highlighted (in bold).

In the following, K will denote a subset of X which plays the role of a constraint set, that is, a set of faces which must be preserved during the thinning.

Definition 21 Let $X \preceq \mathbb{F}^n$, let $K \subseteq X$ and let $f \in Ess(X)$. The core of \hat{f} for $\langle X, K \rangle$ is the complex $Core(\hat{f}, X, K) = \cup \{\hat{g} \mid g \in [K^- \cup Ess(X)] \cap \hat{f}^*\}$.

Definition 22 Let $X \preceq \mathbb{F}^n$, let $K \subseteq X$ and let $f \in X$.

We say that f and \hat{f} are regular for $\langle X, K \rangle$ if $f \in \text{Ess}(X)$ and if \hat{f} collapses onto $\text{Core}(\hat{f}, X, K)$.

We say that f and \hat{f} are critical for $\langle X, K \rangle$ if $f \in \text{Ess}(X)$ and if f is not regular for $\langle X, K \rangle$.

If $X \preceq \mathbb{F}^n$, we set $\text{Critic}(X)K = \cup\{\hat{f} \mid f \text{ is critical for } \langle X, K \rangle\}$, $\text{Critic}(X)K$ is the critical kernel of X constrained by K , and $\text{Critic}(X)\emptyset$ is the critical kernel of X .

Figure 5.4 helps us to illustrate these notions. In Figure 5.4a, the letters A, B, C, D, E indicate 2-faces, the letters a, b, c, d, e, f 1-faces, and the letters t, u, v, w, x, y, z 0-faces. The essential faces of the complex X form the set $\text{Ess}(X) = \{A, B, C, D, E, a, b, c, x, y, z\}$. The core of \hat{C} for $\langle X, \emptyset \rangle$ is the set $\{x, b, y, z\}$, the core of \hat{D} for $\langle X, \emptyset \rangle$ is $\{y, c, u\}$. We can see that a collapse sequence from \hat{D} to $\{y, c, u\}$ exists: e.g., $\langle \hat{D}, \{v, e, w, f, y, c, u\}, \{w, f, y, c, u\}, \{y, c, u\} \rangle$. Thus, the face D is regular for $\langle X, \emptyset \rangle$. On the other hand, it can be seen that no collapse sequence from \hat{C} to $\{x, b, y, z\}$ exists: the face C is critical for $\langle X, \emptyset \rangle$. Let $K = \{v\}$, the core of \hat{D} for $\langle X, K \rangle$ is $\{y, c, u, v\}$, and we can see that D is critical for $\langle X, K \rangle$. Figure 5.4b shows the critical kernel of X , and Figure 5.4c shows the critical kernel of X constrained by K .

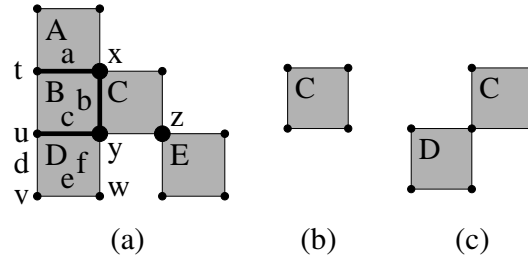


Figure 5.4: (a): A complex X for the illustration of the notions of essential face, core and critical face (see text). (b): The critical kernel $\text{Critic}(X)\emptyset$. (c): The constrained critical kernel $\text{Critic}(X)K$, with $K = \{v\}$.

In Figure 5.5, we show that the very notion of critical kernel can be seen as a powerful thinning algorithm, which consists in computing iteratively the critical kernel of the preceding computation.

The following theorem holds in arbitrary dimension, it is one of the main results in the framework of critical kernels.

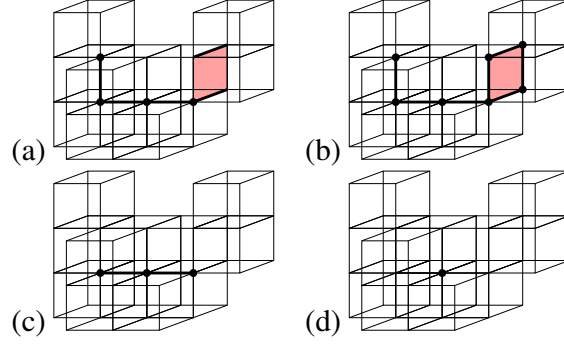


Figure 5.5: (a): A complex X and its critical faces (highlighted). (b): The critical kernel $X_1 = \text{Critic}(X)\emptyset$. (c): $X_2 = \text{Critic}(X_1)\emptyset$. (d): $X_3 = \text{Critic}(X_2)\emptyset = \text{Critic}(X_3)\emptyset$.

Theorem 2 ((Bertrand, 2005)) *Let $X \preceq \mathbb{F}^n$, let $K \subseteq X$. The complex X collapses onto the critical kernel of X constrained by K .*

As illustrated in Figure 5.6, thanks to Theorem 2 we have the possibility to choose arbitrarily any constraint subset K and we have the guarantee that X collapses onto $\text{Critic}(X)K$. This allows us to add some geometrical constraints to the thinning process, and to obtain for example curvilinear or surfacic skeletons (Bertrand and Couprie, 2006c). Here, we will use this possibility for two aims: to ensure that the final skeleton includes the Euclidean medial axis, and to guide the thinning process according to an Euclidean distance map (Section 5.6).

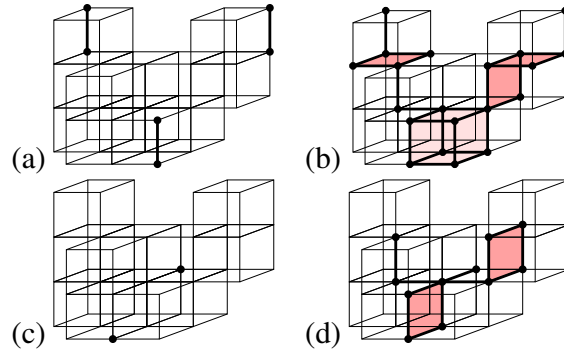


Figure 5.6: (a): A set of faces K_1 . (b): The constrained critical kernel $\text{Critic}(X)K_1$. (c): A set of faces K_2 . (d): The constrained critical kernel $\text{Critic}(X)K_2$.

5.3 A bijection between \mathbb{F}^n and \mathbb{Z}^n

In order to define an Euclidean medial axis in \mathbb{F}^n , we have to define a distance in such a space, as close as possible to the Euclidean distance. The easiest way to do so is to take advantage of a “natural” bijection between \mathbb{Z}^n and \mathbb{F}^n , defined below.

Definition 23 We define the bijection Ψ^{-1} from \mathbb{Z}^n to \mathbb{F}^n as follows: to each $x = (x_1, \dots, x_n)$ of \mathbb{Z}^n , we associate the face $\Psi^{-1}(x) = f = f_1 \times \dots \times f_n$, where each f_i belongs either to \mathbb{F}_0^1 or to \mathbb{F}_1^1 , such that for any $i \in \{1 \dots n\}$,

- if $x_i = 2x'_i$ with $x'_i \in \mathbb{Z}$, then $f = \{x'_i, x'_{i+1}\}$;
- if $x_i = 2x'_i - 1$ with $x'_i \in \mathbb{Z}$, then $f = \{x'_i\}$.

Let $X \preceq \mathbb{F}^n$, we define the embedding of X in \mathbb{Z}^n as $\Psi(X) = \{\Psi(f) \mid f \in X\}$.

This correspondence is illustrated in Figure 5.7 for the 2D case. Specifically, we can see that if $x = (2a, 2b)$ then $\Psi^{-1}(x) = \{(a, b), (a, b + 1), (a + 1, b), (a + 1, b + 1)\}$ (a 2-face); if $x = (2a - 1, 2b)$ then $\Psi^{-1}(x) = \{(a, b), (a, b + 1)\}$ (a vertical 1-face); if $x = (2a, 2b - 1)$ then $\Psi^{-1}(x) = \{(a, b), (a + 1, b)\}$ (an horizontal 1-face); if $x = (2a - 1, 2b - 1)$ then $\Psi^{-1}(x) = \{(a, b)\}$ (a 0-face). In all figures like Figure 5.8, a complex X is represented by its embedding $\Psi(X)$ (one image point per face).

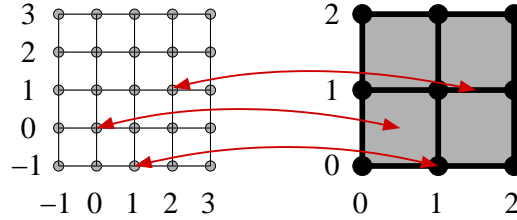


Figure 5.7: Illustration of the bijection Ψ^{-1} between \mathbb{Z}^2 and \mathbb{F}^2 .

Depending on the parity of their coordinates, the elements of \mathbb{Z}^n represent different kinds of faces. The following classification will thus be useful in the sequel.

Definition 24 Let $i \in \{0, \dots, n\}$. We define the set $G_i \subseteq \mathbb{Z}^n$ as the set of elements in \mathbb{Z}^n with exactly i even coordinates, more precisely $G_i = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n \mid (z_1 \bmod 2) + \dots + (z_n \bmod 2) = n - i\}$.

From Definition 23 and Definition 24, we see that i -faces (with $i \in \{0, \dots, n\}$) are represented by points of G_i (points with i even coordinates), *e.g.*, 2-faces are represented by points of G_2 . As a matter of fact, the bijection Ψ^{-1} allows to show the strong links between the complex \mathbb{F}^n and the topological space built on \mathbb{Z}^n introduced by E.D. Khalimsky (Khalimsky, 1969).

5.4 A first approach for an Euclidean medial axis in

\mathbb{F}^n

The definition of the medial axis in terms of centers of maximal balls (Blum, 1967) can be used in any metric space, *e.g.* the subset G_n of \mathbb{Z}^n (a grid) equipped with a distance. Let x and y be two points of G_n , we denote by $d(x, y)$ the Euclidean distance between x and y . For defining and computing the medial axis, it is in fact sufficient to consider the squared Euclidean distance $d^2(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$.

The goal of this paper is to provide a definition and an algorithm for the Euclidean skeleton of a cubical complex. In most works dealing with complexes as models of digital images (see *e.g.* (Bertrand and Couprie, 2006b; Kovalevsky, 1989)), the pixels of the digital image are associated to square elements (2-faces) of the complex. In order to obtain an Euclidean skeleton of a complex X , a first idea is to consider the set of points which are in $\Psi(X) \cap G_2$, to compute the Euclidean medial axis M of this set, and to use $K = \Psi^{-1}(M)$ as a constraint set for the parallel thinning of X . Let us define formally the medial axis in such a context.

Let G be a subset of \mathbb{Z}^n (in the following, we will use only the cases where $G = G_n$ or $G = \mathbb{Z}^n$). Let $R \in \mathbb{N}$, $x \in G$, the (*Euclidean*) ball in G centered on x with (*squared*) radius R is defined by $B^{\leq}(x, R) = \{y \in G \mid d^2(x, y) \leq R\}$.

Let S be any subset of G , let $x \in S$, we say that a ball $B = B^{\leq}(x, R)$ in G is *maximal for S (in G)* if B is included in S and maximal for this property, more precisely if $B \subseteq B^{\leq}(x', R') \subseteq S$, with $x' \in G$ and $B^{\leq}(x', R')$ being a ball in G , implies $B^{\leq}(x', R') = B$. The (*Euclidean*) medial axis of S (in G), denoted by $\text{MA}(S, G)$ or simply by $\text{MA}(S)$ when no confusion may occur, is the set of centers of all maximal Euclidean balls for S in G .

Now let us introduce a definition which can also be seen as an algorithm, it allows to obtain a skeleton which is uniquely defined, given an object and a constraint set.

Let X be a complex in \mathbb{F}^n , and let $K \subseteq X$. Let $\langle X_0, X_1, \dots, X_k \rangle$ be the unique

sequence such that $X_0 = X$, $\text{Critic}(X_k)K = X_k$ and $X_i = \text{Critic}(X_{i-1})K$, $i = 1, \dots, k$. The set X_k is the *minimal skeleton of X constrained by K* .

If X is a pure complex, *e.g.* a complex which represents a binary image, then we can take as constraint set the set K defined by: $K = \Psi^{-1}(\text{MA}(\Psi(X), G_n))$, which is the direct transposition of the medial axis in terms of complex. Figure 5.8 shows the result of this first approach. The skeleton looks rather thick, especially when compared to Figure 5.1.

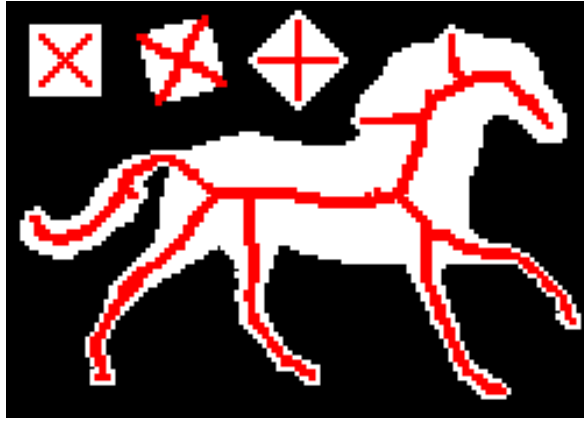


Figure 5.8: A complex X (in white), and the minimal skeleton of X constrained by its medial axis (highlighted).

5.5 A thinner Euclidean medial axis

Although the skeleton defined in the previous section has some nice features (it is uniquely defined, homotopic and contains the Euclidean medial axis), it does not take advantage of all elements of the complex. More precisely, to define the medial axis we only considered points which correspond to n -faces, since both object points and centers of balls belong to the set G_n .

The immediate approach to take into account the other kinds of faces consists of computing directly the Euclidean medial axis of the embedding of X in \mathbb{Z}^n , which leads to take as a constraint set the set $K' = \Psi^{-1}(\text{MA}(\Psi(X), \mathbb{Z}^n))$. The result, however, is quite noisy and not useful in practice, as shows Figure 5.9. More precisely, the embedding of the complex X is made of squares of 3×3

points (in 2D), and thus its contour is “crenelated”. This fact induces many medial axis points in the neighborhood of the object contour.

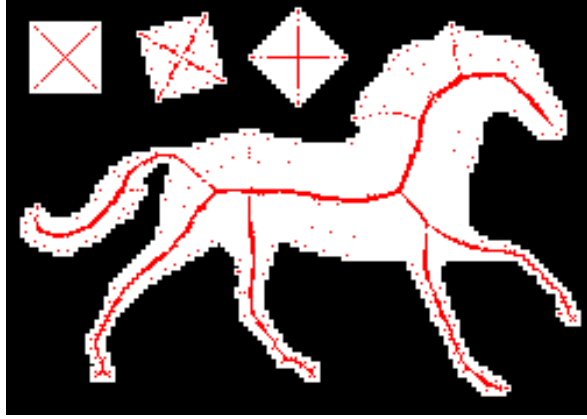


Figure 5.9: A complex X (in white), and the Euclidean medial axis of $\Psi(X)$ (highlighted).

In order to get a thinner medial axis, we will follow another approach which consists of considering a larger number of Euclidean balls in G_n , by using the concept of G_n -balls. The G_n -balls are Euclidean balls in G_n , centered on any point of \mathbb{Z}^n , not necessarily in G_n .

Definition 25 Let $x \in \mathbb{Z}^n$, $R \in \mathbb{N}$, the G_n -ball centered on x with (squared) radius R is the set $\{y \in G_n \mid d^2(x, y) \leq R\}$.

The family of G_n -balls includes all the Euclidean balls in G_n considered for defining the medial axis MA, in addition to G_n -balls centered on points of G_i , $i < n$.

Let us illustrate G_n -balls in a simple situation. In Figure 5.10, a detail of Figure 5.8 is shown. In Figure 5.10b, the points of G_2 are symbolized by small squares, and other points of \mathbb{Z}^2 by small discs ; the dashed circle helps to visualize a Euclidean ball B_1 in G_2 , made of 9 points and centered on x , and the solid circle helps to visualize a G_2 -ball B_2 , made of 12 points and centered on y . The ball B_1 is a maximal ball in G_2 : it is strictly included in B_2 , but B_2 is centered on y which is in G_1 and not in G_2 (Figure 5.10c and Figure 5.10d show respectively the images of B_1 and B_2 as subsets of X , in light gray). Thus, x belongs to the medial axis, defined as the set of the centers of all maximal balls in G_2 . The same

can be said of the 2-face z at the right of x . If we take into account Euclidean balls centered on points like y (corresponding to faces of dimension lower than 2) in the definition of the medial axis, we see that B_1 would no longer be a maximal ball: instead of two medial axis points x and z , we would only have the point y .

Definition 26 Let $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, we say that a G_n -ball B is G_n -maximal for X if B is included in X and maximal for this property, more precisely if $B \subseteq B' \subseteq X$, with B' being a G_n -ball, implies $B = B'$.

For example, in Figure 5.10b, B_2 is a G_2 -ball, which is G_2 -maximal. On the other hand, B_1 is not G_2 -maximal. We can now give the definition of the H-medial axis (see also (Saúde et al., 2006a)), where “H-” stands for “Higher resolution”.

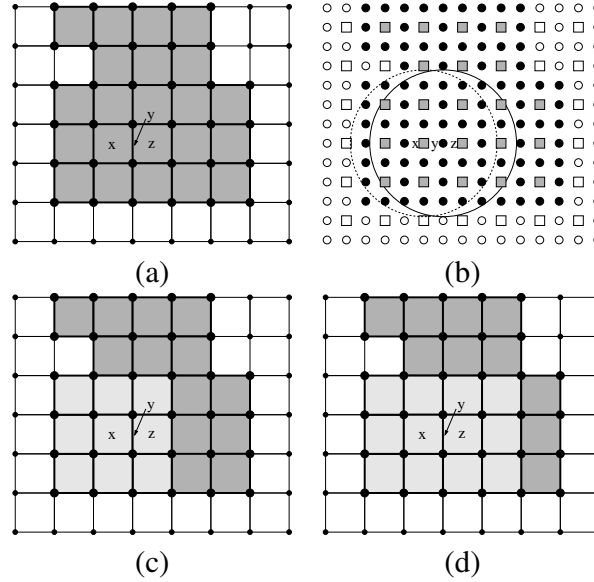


Figure 5.10: Illustration of G_2 -balls and G_2 -maximal balls (see text).

Definition 27 Let $S \subseteq \mathbb{Z}^n$. The H-medial axis of S , denoted by $HMA(S)$, is the set of centers of all G_n -balls which are G_n -maximal for S .

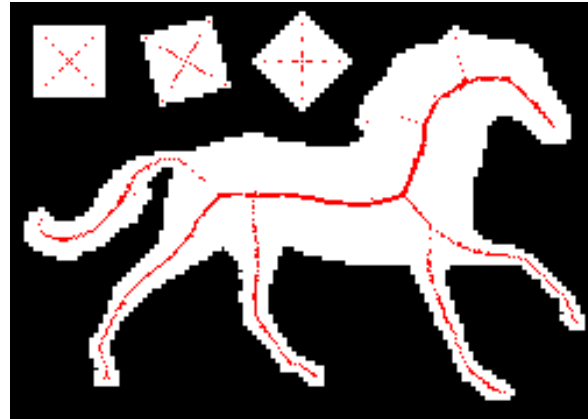
Let $X \preceq \mathbb{F}^n$. The H-medial axis of X , denoted by $HMA(X)$, is defined by $HMA(X) = \Psi^{-1}(HMA(\Psi(X)))$.

An efficient algorithm for computing the H-medial axis in \mathbb{Z}^2 and \mathbb{Z}^3 , as well as a proof for this algorithm, has been proposed in (Saúde et al., 2006a). The

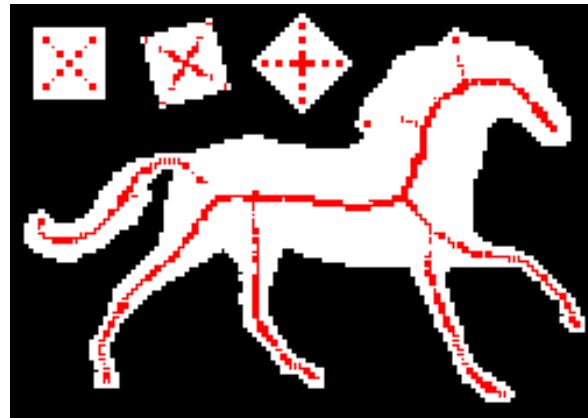
76 Euclidean Homotopic Skeleton in 2D and 3D Based on Critical Kernels

algorithm uses the same idea as the one presented in (Rémy and Thiel, 2005) for the exact Euclidean medial axis. It consists of two basic steps: i) calculate the exact Euclidean distance transform of S (this can be done with a linear-time algorithm (Hirata, 1996)) and ii) for each point of S , test if it is the center of a G_n -maximal G_n -ball. This test is done efficiently with the help of look-up tables. We invite the interested reader to consult (Saúde et al., 2006a) for further details on the implementation of the H-medial axis algorithm.

Consider the 2-dimensional complex X depicted in white in Figure 5.11. The H-medial axis $M = \text{HMA}(X)$ is shown in Figure 5.11a, and its closure M^- (a subcomplex of X) is shown in Figure 5.11b.



(a)



(b)

Figure 5.11: (a): The Euclidean H-medial axis of X (highlighted). (b): The complex which is the closure of the Euclidean H-medial axis of X (highlighted).

5.6 Guided homotopic thinning algorithms

Before introducing our new algorithm, we first introduce algorithms EHSa and EHSb which help to motivate and understand all the features of algorithm EuclideanHomotopicSkeleton presented hereafter.

Algorithm EHSa is the simplest one. It is essentially a parallel algorithm; notice, in particular, that no choice is made depending on the orientation of the object's contour.

Like in (Couprie et al., 2006a; Davies and Plummer, 1981; Talbot and Vincent, 1992; Vincent, 1991), it is necessary to guide the thinning process by the values of an Euclidean distance map, in order to prevent some geometrical deviations that may occur in places where there are no medial axis point but where topology preservation imposes the presence of skeleton points.

Let $G = \mathbb{Z}^n$, let $H \subseteq G$, $x \in H$, we denote by $D_H(x)$ and by $D_H^2(x)$ the Euclidean distance and the squared Euclidean distance, respectively, from x to the nearest point $y \in G \setminus H$. We say that D_H (resp. D_H^2) is the *distance map* (resp. *squared distance map*) of H .

Notice that all the values of the distance map D_H^2 are of the form $a_1^2 + \dots + a_n^2$, where the a_i are integers, and n is the dimension of the space. In the following, \mathbb{D}_n denotes the set of numbers which are the sum of n square integers.

Algorithm 12: EHSa

Data : $X \subseteq \mathbb{F}^n$
Result : $X \subseteq \mathbb{F}^n$

- 1 $H \leftarrow \Psi(X)$;
- 2 compute the squared distance map D_H^2 ;
- 3 $M \leftarrow \Psi^{-1}(\text{HMA}(H))$;
- 4 $R_{\max} \leftarrow \max\{D_H^2(x) \mid x \in H\}$;
- 5 $R \leftarrow 2$;
- 6 **while** $R \leq R_{\max}$ **do**
 - 7 $K \leftarrow \Psi^{-1}(\{x \in H \mid D_H^2(x) \geq R\}) \cup M$;
 - 8 $X \leftarrow \text{Critic}(X)K$;
 - 9 $R \leftarrow \min\{r \in \mathbb{D}_2 \mid r > R\}$;

After computing the geometrical embedding H of the complex X (line 1), the squared Euclidean distance map (line 2) and the H-medial axis of this set (line 3), the algorithm loops from $R = 2$ to the squared radius of the largest ball in the object (R_{\max} , see line 4). At the beginning of each step, the constraint set

K is updated, in order to contain the elements of the H-medial axis M , plus the elements which are at a distance greater than R from the background (line 7). The critical kernel of the current object X constrained by K is then computed (line 8), and the current radius R is incremented up to the next integer which is a sum of n squares (line 9).

Notice that, in this algorithm, the constraint set K needs not to be a complex. On the other hand, the set X remains a complex during all the execution, by definition of $Critic(X)K$.

A direct implementation of this algorithm on a sequential computer would have a time complexity in $O(m^2)$ where $m = |X|$, since the loop at line 6 would execute a little less than R_{\max} times where $R_{\max} \leq (\sqrt{m})^2$, and each execution of the loop requires a scanning of the whole object which may be performed in $O(m)$.

For an efficient sequential implementation, we introduce algorithm EHSb which can be implemented to run in $O(m \log m)$ time, thanks to appropriate data structures (a balanced binary search tree for Q in order to efficiently extract the minimum value at line 6, chained lists for S and C). The characterization of essential and critical faces is local and can be performed efficiently by using precomputed lookup tables. It can be easily seen that EHSa and EHSb always produce equal results.

Algorithm 13: EHSb

Data : $X \subseteq \mathbb{F}^n$
Result : $X \subseteq \mathbb{F}^n$

- 1 $H \leftarrow \Psi(X) ; K \leftarrow X;$
- 2 compute the squared distance map D_H^2 ;
- 3 $M \leftarrow \Psi^{-1}(\text{HMA}(H));$
- 4 $Q \leftarrow \{(D_H^2(x), x) \mid x \in H\};$
- 5 **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
- 6 $p \leftarrow \min\{q \mid \exists z \in H, (q, z) \in Q\};$
- 7 $S \leftarrow \Psi^{-1}(\{x \in H \mid (p, x) \in Q\});$
- 8 $Q \leftarrow \{(q, z) \in Q \mid q > p\};$
- 9 $K \leftarrow (K \setminus S) \cup M;$
- 10 $C \leftarrow \{f \in S \mid f \text{ is critical for } \langle X, K \rangle\};$
- 11 $X \leftarrow (X \setminus S) \cup C^-;$

Compare, in Figure 5.12 and Figure 5.8, the relative thinness of this skeleton and the one obtained with the “classical” medial axis as constraint set (see also a

detail in Figure 5.13).

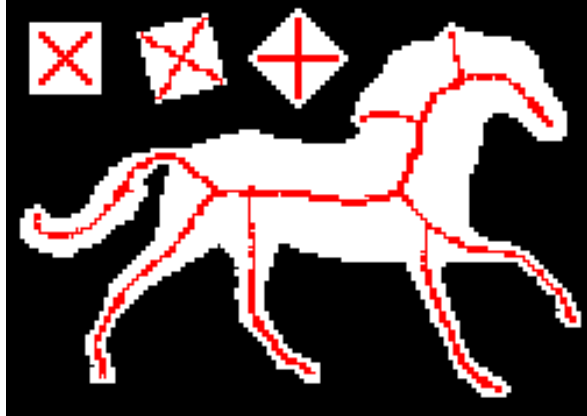


Figure 5.12: Result of algorithm EHSb (or EHSa).

5.7 Geometrical distortion of the skeleton

Algorithms EHSa and EHSb usually give satisfactory results on “small” images, such as the one of Figure 5.12. However, especially for larger images, they do not guarantee that points of the homotopic skeleton outside the medial axis are “well centered” in the object. More precisely, skeleton branches may fail to follow lines of steepest slope of the Euclidean distance map.

This drawback has been well analyzed in (Talbot and Vincent, 1992) (see also (Couprie et al., 2006a)), for other thinning algorithms guided by Euclidean distance maps. In Figure 5.17, we see an illustration of the problem which may be encountered, and in Figure 5.14 we show a small part of a similar but simpler configuration, which will help us to understand what happens.

Let us concentrate on Figure 5.14. In (b), the numbers correspond to the squared distance map values. The circled point with value 1 is one of the points belonging to the constraint set M (see Algorithm EHSb), that is, a medial axis point. Suppose that all the points with a value below 8 have been processed by the homotopic thinning algorithm. At this step, the points in gray are still in the “object” X , as well as the two circled points (the point at 1 because it belongs to M , and the one at 4 because it was a critical point, at the step where it has been

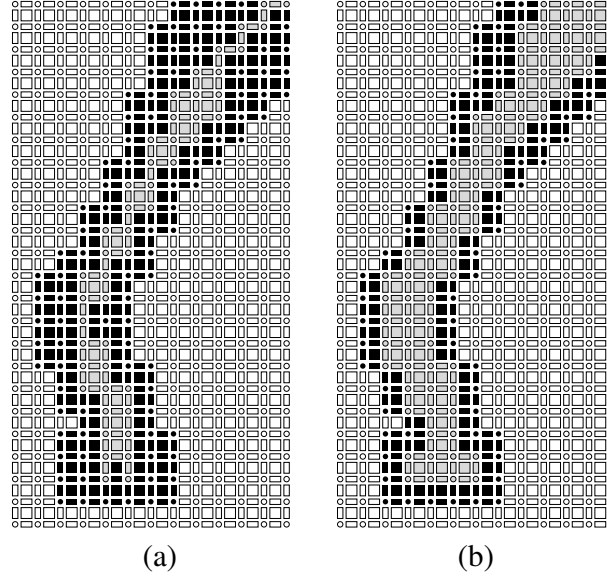


Figure 5.13: (a): Zoom on a part of Figure 5.12. (b): Zoom on a part of Figure 5.8.

processed). All other points are not in X . Obviously, the point v at 8 adjacent to z at 4 will be selected before its neighbor w at 9, and since it will not be a critical point at this stage, it will be deleted. Such a behaviour will be reproduced at later stages, generating a diagonal branch of the skeleton, and is in contradiction with a property of the skeleton in the continuous framework: informally, skeleton branches follow lines of steepest slope of the Euclidean distance map. Let us compute the slopes of zv and zw in our example: $(\sqrt{8} - \sqrt{4})/1 \approx 0.83$, and $(\sqrt{9} - \sqrt{4})/\sqrt{2} \approx 0.71$. Thus, the point v should be kept in the skeleton and the point w deleted according to this criterion.

The effect this behaviour is also illustrated in Figure 5.15a with a more complex image, and in Figure 5.15b we see the expected result where the skeleton follows the lines of steepest slope of the distance map.

5.8 New Euclidean homotopic skeleton algorithm

A solution to the problem described in Section 5.7, which applies both for the 2D and 3D cases, has been proposed in (Coupré et al., 2006a) and can be adapted to the framework of critical kernels. It consists in defining a priority function which takes into account both the distance map and an auxiliary function defined in the neighborhood of each dynamically detected skeleton point.

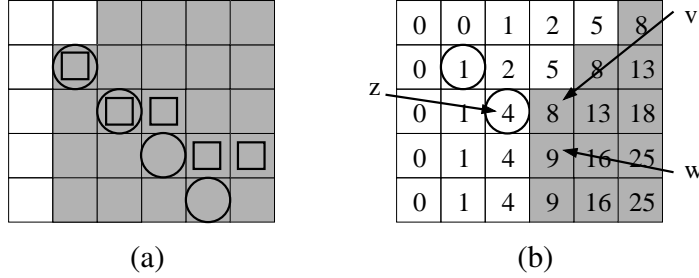


Figure 5.14: Illustration of a geometrical distortion of the skeleton. (a): A part of an object X (in gray), skeleton points found by a thinning algorithm guided only by the distance map (circles), path of steepest slope w.r.t. the distance map (squares). (b): A step in the thinning process (see text). The numbers are the distance map values.

Let $x \in \mathbb{Z}^n$, we define the *neighborhood* of x as the set $\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Z}^n \mid \max(|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|) \leq 1\}$. Let us define $\Gamma(x) = \gamma(x)$ if $x \in G_i$ with $i \in \{0 \dots n-1\}$; and $\Gamma(x) = \gamma(\gamma(x))$ if $x \in G_n$. Let $H \subseteq \mathbb{Z}^n$, let $x, y \in H$, we define $\delta(x, y) = D_H(x) + (D_H(y) - D_H(x))/d(x, y)$.

The justification of the expression of δ is the following. The quantity $(D_H(y) - D_H(x))/d(x, y)$ represents the slope, in the distance map, between the point x and the point y . For a given point x detected as a skeleton point, we wish to classify the points of its neighborhood in ascending order of slope, rather than in ascending order of the distance map values, in order to guarantee that skeleton lines will follow the steepest slope. Notice that only the neighbors y of x such that $D_H(y) > D_H(x)$ have to be considered, since the other ones have already been processed. Thus, the slopes $(D_H(y) - D_H(x))/d(x, y)$ that we will compute are always positive. Notice also that $\delta(x, y)$ is always smaller than $D_H(y)$.

In algorithm `EuclideanHomotopicSkeleton`, line 7 takes into account both the couples in list Q which contain points associated with their distance map values, and those which contain points associated with their δ values (slope information). Lines 13-15 update the list Q by adding points belonging to the neighborhood of detected skeleton points, together with their slope information. For example, in the case of Figure 5.14, we have $D_H(v) = \sqrt{8} \approx 2.83$, and $D_H(w) = 3$, thus the couples $(\sqrt{8}, v)$, $(3, w)$ are present in Q since the initialization step line 4. When

the point z is processed and detected as a skeleton point (line 11), the quantities $p_v = \sqrt{4} + (\sqrt{8} - \sqrt{4})/1 = \sqrt{8}$ and $p_w = \sqrt{4} + (\sqrt{9} - \sqrt{4})/\sqrt{2} \approx 2.71$ are computed, and the couples (p_v, v) , (p_w, w) are stored in Q (line 15). Later on, the presence of the couple (p_w, w) in Q will force all the points having the same priority p_w to be processed in a single iteration (lines 7-15) before the points with priority $\sqrt{8}$ or 3. Note that the set Q should be represented, for efficiency, by a balanced binary search tree structure.

Let us now motivate the choice of the definition $\Gamma(x) = \gamma(\gamma(x))$ in the case where $x \in G_n$. Figure 5.15c shows what may happen if we define $\Gamma(x) = \gamma(x)$ in all cases. Consider Figure 5.16 which illustrates a particular step of the thinning for a small configuration extracted from Figure 5.15c: the element x has been detected as critical, and the elements u, v (which correspond to 1-faces) have been recorded in the list Q . A few steps later, these elements are released from the constraint set K , but they are not essential, thus not critical. In consequence they will not “propagate” the slope information. Later on, when processing elements y and z (2-faces), the slope information relative to the skeleton element x will not be available. On the other hand, with our definition of Γ , y and z are recorded in Q with their slope information as soon as x is processed.

Algorithm 14: EuclideanHomotopicSkeleton

Data : $X \subseteq \mathbb{F}^n$
Result : $X \subseteq \mathbb{F}^n$

- 1 $H \leftarrow \Psi(X)$; $K \leftarrow X$;
- 2 compute the distance map D_H ;
- 3 $M \leftarrow \Psi^{-1}(\text{HMA}(H))$;
- 4 $Q \leftarrow \{(D_H(x), x) \mid x \in H\}$;
- 5 $Q \leftarrow Q \cup \{(p_x, x) \mid x \in M, p_x = \min\{\delta(x, y), y \in M \cap \Gamma(x)\}\}$;
- 6 **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
 - 7 $p \leftarrow \min\{q \mid \exists z \in H, (q, z) \in Q\}$;
 - 8 $S \leftarrow \Psi^{-1}(\{x \in H \mid (p, x) \in Q\})$;
 - 9 $Q \leftarrow \{(q, z) \in Q \mid q > p\}$;
 - 10 $K \leftarrow (K \setminus S) \cup M$;
 - 11 $C \leftarrow \{f \in S \mid f \text{ is critical for } \langle X, K \rangle\}$;
 - 12 $X \leftarrow (X \setminus S) \cup C^-$;
 - 13 **foreach** $x \in C$ **do**
 - 14 $M \leftarrow M \cup \{x\}$;
 - 15 $Q \leftarrow Q \cup \{(p_y, y) \mid y \in \Gamma(x), p_y = \delta(x, y)\}$;

Compare the results of algorithms EHSb and EuclideanHomotopicSkeleton, for the detailed view of Figure 5.15a,b and also for the larger image of Figure 5.17 and Figure 5.18.

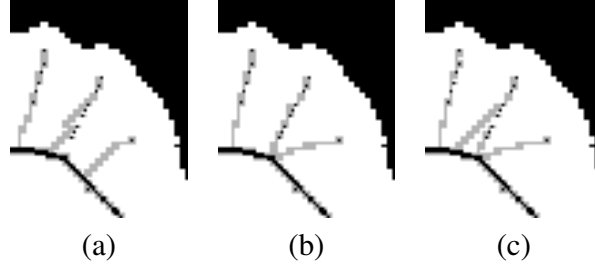


Figure 5.15: (a): Zoom on a part of a skeleton obtained by algorithm EHSb (the skeleton is in gray, and the H-medial axis is in black). (b): Zoom on a part of a skeleton obtained by algorithm EuclideanHomotopicSkeleton. (c): Variant of EuclideanHomotopicSkeleton, see text.

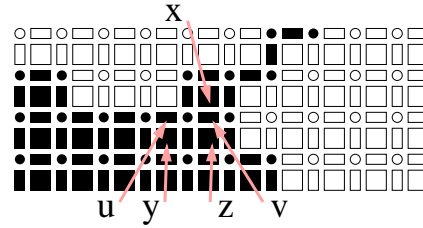


Figure 5.16: A configuration used to explain the definition of Γ .

Conclusion

Based on recent advances in the domains of parallel homotopic thinning and exact discrete Euclidean transforms, we proposed in this paper definitions and algorithms for the Euclidean homotopic skeleton based on critical kernels.

The framework of critical kernels allows to design efficient and topologically sound algorithms for parallel homotopic thinning without arbitrary decisions, leading to a unique result. The H-medial axis is a medial axis based on the Euclidean distance in a doubled resolution grid. After adapting the H-medial axis to the framework of cubical complexes, we proposed a thinning algorithm which

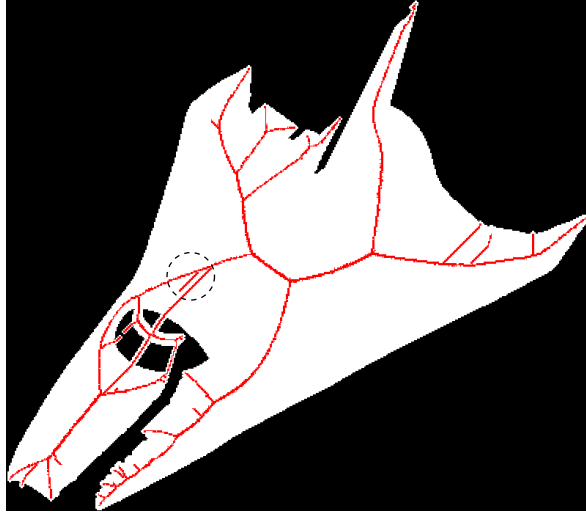


Figure 5.17: Skeleton obtained by algorithm EHSb. Notice the detail encircled by a dashed line, a branch of the skeleton does not correspond to any noticeable contour saliency.

preserves the H-medial axis and follows the lines of steepest slope of the distance map. The obtained skeleton has the following characteristics: well-defined, homotopic, sufficient for the reconstruction of the original object, centered with respect to the (exact) Euclidean distance and thus weakly sensitive to rotations by arbitrary angles, and strictly invariant to rotations by multiples of $\pi/2$. Furthermore it is thinner than the one obtained by a direct approach, it can be computed efficiently both in 2D and 3D (see Figure 5.19), and it can be easily filtered by pruning the medial axis based on a radius and/or angle criterion (see (Couprie et al., 2006a; Talbot and Vincent, 1992)) in order to decrease sensitivity to small perturbations along the object shape. To our best knowledge, a skeleton with all these characteristics cannot be found in the literature.

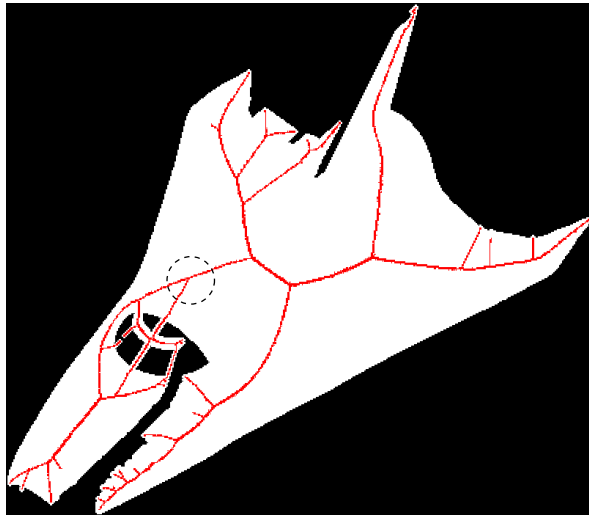


Figure 5.18: Skeleton obtained by algorithm `EuclideanHomotopicSkeleton`. Notice the difference in the encircled region.

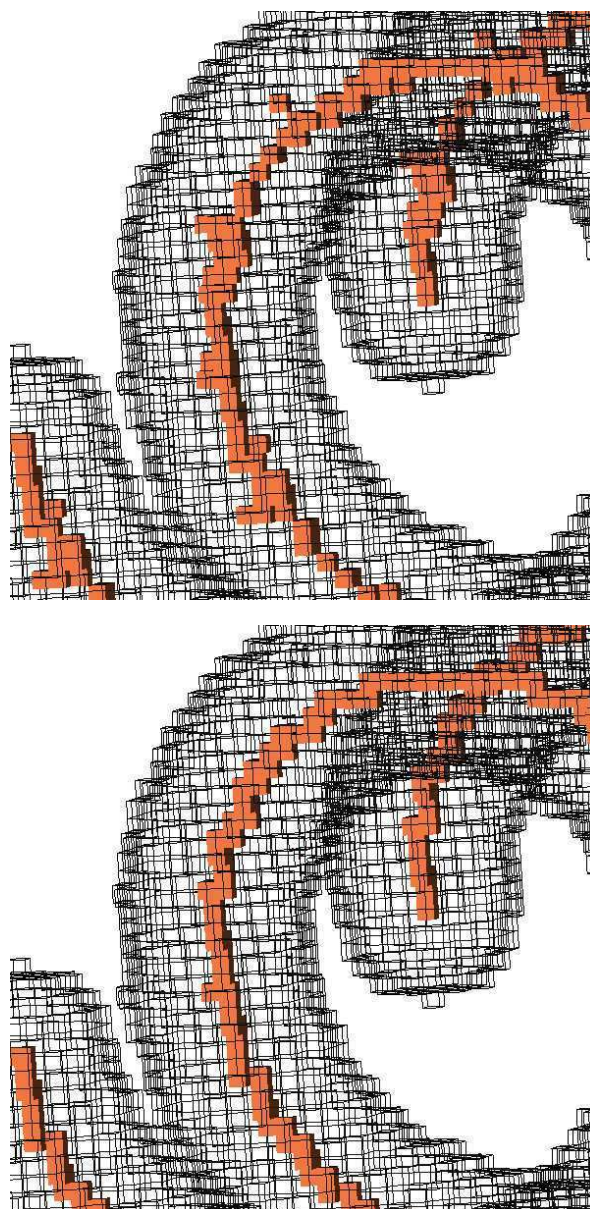


Figure 5.19: Skeletons of a thick spiral. Up: result of the parallel thinning algorithm CK^3 (see (Bertrand and Couprie, 2006c)). Down: Euclidean homotopic skeleton.

Capítulo 6

Conclusão

Apresentamos os resultados principais da pesquisa realizada para esta tese e demos contribuições originais para a comunidade de processamento de imagens. Dentre estas contribuições, foi introduzido o *Eixo Mediano Euclidiano em Resolução Aumentada* (HMA). Sua definição segue a mesma formulação discreta do conceito clássico de eixo mediano originalmente proposto por Blum (1961), mas explora uma classe mais extensa de discos Euclidianos em uma grade de resolução aumentada. Mostramos que o HMA tem as mesmas propriedades do eixo mediano discreto e, além disso, é mais fino. Como nem o eixo mediano nem o HMA preservam a topologia, combinamos também o HMA com um afinamento homotópico guiado pela distância Euclidiana e obtivemos um esqueleto homotópico, centrado, suficiente para a reconstrução (reversível) que é também muito mais fino do que os esqueletos obtidos pela combinação padrão eixo mediano com afinamento homotópico.

No Capítulo 3 mostramos um exemplo onde é impossível obter um esqueleto homotópico com um pixel de largura, devido ao cruzamento de oito linhas no objeto (veja Figura 3.7). Além do problema imposto por cruzamentos, restringir o processo de afinamento pelo eixo mediano também pode resultar em esqueletos espessos (*e.g.* o eixo mediano de um retângulo 2×10 é o próprio retângulo, que tem largura de dois pixels). No entanto, de Souza (2005) prova que o eixo mediano baseado nas conectividades 4- e 8-, na resolução duplicada é garantido ser de um pixel de largura, exceto em regiões de cruzamentos. É importante observar que este não é o caso para o eixo mediano Euclidiano, pois os discos Euclidianos discretos possuem formas muito particulares. Na Figura 6.1(a) mostramos um eixo mediano de largura dois pixels e o HMA é mostrado na Figura 6.1(b). O HMA é composto pelos mesmos pontos do eixo mediano.

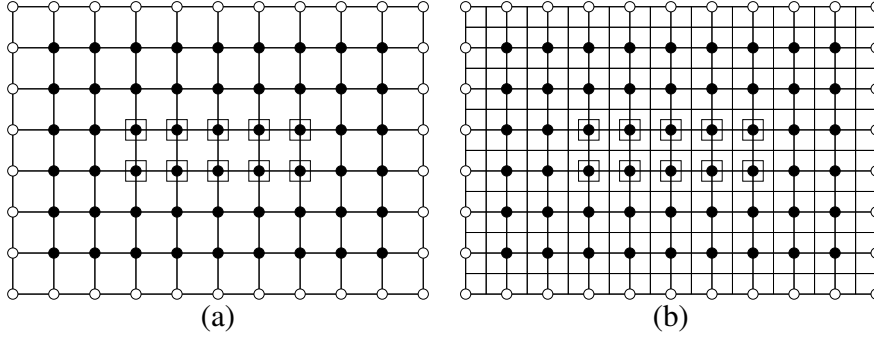


Figura 6.1: Um HMA espesso. (a) um objeto X em preto e seu eixo mediano Euclidiano (quadrados); (b) o HMA (quadrados) de X representado na grade $[\frac{1}{2}\mathbb{Z}]^2$. Note que os pontos do HMA são os mesmos pontos do eixo mediano.

Para ambas as definições, do HMA e dos esqueletos homotópicos, algoritmos eficientes foram propostos e provados. Embora o algoritmo para o afinamento homotópico seja válido em nD , a corretude do algoritmo para o HMA é provado somente até 3D, o que já é suficiente para aplicações práticas. Entretanto, estamos trabalhando em uma abordagem diferente afim de obter um algoritmo válido em nD e mais eficiente do que o algoritmo proposto. Damos mais detalhes sobre isto na Seção 6.1.

Esperamos que os trabalhos futuros propostos abaixo sejam executados, pois as melhorias teóricas trazidas por nossas contribuições necessitam ser avaliadas em aplicações práticas.

6.1 Trabalhos futuros

Nesta tese propusemos um algoritmo para a computação do HMA exato, baseado em um algoritmo para o eixo mediano Euclidiano exato clássico. Embora eficiente, o algoritmo proposto não é linear em complexidade e provamos que ele não é válido em n -dimensões. Na Seção 4.3 apoiamos-nos na Proposição 5 para mostrar que, em 2D e em 3D, pode-se computar os raios dos E_n -discos máximos pela simples computação da transformada de distância Euclidiana exata. Mas indicamos também que estes raios podem ser computados “procurando o primeiro inteiro $R \geq D_{X_h}(x)$ tal que $x + v \in E_n(\overline{X_h})$, com v sendo qualquer vetor satisfazendo

$v^2 = R''$. Entretanto, estes valores podem diretamente ser computados pela transformada de distância às sementes propostas no Capítulo 2. Veja, por exemplo, a Figura 2.3(a), onde o conjunto de sementes é exatamente o conjunto de pontos E_n do complementar do objeto. Assim, a primeira proposta de trabalho futuro é aplicar esta transformada de distância às sementes, ao invés da transformada de distância ordinária, afim de obter um algoritmo válido em nD . O segundo trabalho futuro será responder à seguinte pergunta: não seria também possível extrair os raios dos discos E_n -mínimos por uma transformada de distância às sementes ou a uma adaptação simples dela? A motivação para tal trabalho é que, se a resposta a esta pergunta for positiva, a função $EnRmin$ poderia provavelmente ser contornada, tendo por resultado um algoritmo com a mesma complexidade que a do algoritmo proposto por Rémy e Thiel.

As conseqüências da existência de um algoritmo linear para a computação dos raios E_n -mínimo parecem ser ainda mais satisfatória. Como apresentamos no Capítulo 3, existem algoritmos ótimos, separáveis, válidos em nD , para a extração do conjunto de parabolóides que compõe o envelope superior da transformada de distância Euclidiana (Cœurjolly, 2003; Saito e Toriwaki, 1994b). Tal envelope é chamado eixo mediano reduzido. É um subconjunto do eixo mediano Euclidiano exato mas é suficiente para a reconstrução do objeto. Suponha que temos os raios E_n -mínimo e também os raios dos E_n -discos máximos para cada ponto. Teríamos dois conjuntos de parabolóides que poderiam ser analisados em conjunto para a obtenção de eixo mediano reduzido em resolução aumentada, similar a (Cœurjolly, 2003; Saito e Toriwaki, 1994b). A vantagem principal seria a complexidade linear do algoritmo para computá-lo. Vamos estudar este problema como trabalho futuro.

Há também uma quantidade grande de trabalho futuro a ser feito na aplicação do HMA para problemas reais. Uma aplicação prática que motivou o estudo de esqueletos Euclidianos mais finos é a análise de forma de estruturas pequenas, em baixa resolução. Um problema como esses muito conhecido é a caracterização do hipocampo em *Imagens de Ressonância Magnética* (IRM). O hipocampo é uma estrutura cerebral de grande interesse na neurologia, devido à sua influência em diversas patologias do sistema nervoso central. Como trabalho futuro pretendemos reproduzir o protocolo proposto por Bouix et al. (2005) para a caracterização do hipocampo baseada no eixo mediano, e adaptá-lo para usar também o HMA, afim de comparar a precisão da análise da forma do hipocampo baseada no eixo mediano clássico e a análise de forma do hipocampo baseado no HMA. Finalmente, consideramos como trabalho futuro importante, aplicar os esqueletos Euclidianos propostos em diversos problemas reais, comparando-o com o eixo mediano

clássico.

6.2 Agradecimentos

Esta tese foi financiada por três instituições diferentes de fomento à pesquisa. A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp) concedeu uma bolsa de doutorado no país para o período no Brasil, processo número 2003/05037-8. Outra bolsa de estudos foi concedida pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) para o período de execução do projeto na França, processo número BEX 0437/04-2. O Centro Nacional de Pesquisa Científica - CNRS¹ concedeu um auxílio à mobilidade do estudante em *co-tutelle*, e financiou participações em congressos.

O programa de *co-tutelle* enriqueceu a colaboração entre as duas instituições onde o projeto foi executado. Somos muito gratos ao projeto número 396/02/04 da cooperação entre a Capes e o Comitê Francês para Avaliação das Cooperações Universitárias com o Brasil - Cofecub², para a realização de tal programa.

¹Centre National de la Recherche Scientifique, France

²Comité Français d'Evaluation de la Coopération Universitaire avec le Brésil, France

Bibliografia

- F. Aurenhammer. Voronoi diagrams a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 23(3):345–405, 1991. ISSN 0360-0300. doi: 10.1145/116873.116880.
- G. Bertrand. On critical kernels. Technical Report IGM2005-5, Institut Gaspard-Monge, Université de Marne-la-Vallée, 2005. URL <http://www-igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2005/05.pdf>.
- G. Bertrand. Skeletons in derived grids. In *ICPR*, pages 326–329, 1984.
- G. Bertrand. On P-simple points. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Math.*, I(321):1077–1084, 1995.
- G. Bertrand. New notions for discrete topology. In *DGCI*, volume 1568 of *LNCS*, pages 216–226. Springer Verlag, 1999.
- G. Bertrand e M. Couprie. Two-dimensional parallel thinning algorithms based on critical kernels. Technical Report IGM2006-2, Institut Gaspard-Monge, Université de Marne-la-Vallée, 2006a. URL <http://www-igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2006/02.pdf>.
- G. Bertrand e M. Couprie. New 2d parallel thinning algorithms based on critical kernels. In *Combinatorial Image Analysis*, volume 4040 of *LNCS*, pages 45–59. Springer Verlag, 2006b.
- G. Bertrand e M. Couprie. New 3d parallel thinning algorithms based on critical kernels. In A. Kuba, K. Palágyi, e L.G. Nyúl, editors, *DGCI*, *LNCS*. Springer Verlag, 2006c.
- H. Blum. An associative machine for dealing with the visual field and some of its biological implications. *Biological prototypes and synthetic systems*, 1:244–260, 1961.

- H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathendunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380. MIT Press, 1967.
- G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 27:321–345, 1984.
- G. Borgefors. Distance transformations in digital images. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 34:344–371, 1986.
- G. Borgefors, I. Ragnemalm, e G. Sanniti di Baja. The Euclidean Distance Transform: finding the local maxima and reconstructing the shape. In *7th Scandinavian Conference on Image Analysis*, volume 2, pages 974–981, Aalborg, Denmark, 1991.
- S. Bouix, J. C. Pruessner, D. L. Collins, e K. Siddiqi. Hippocampal shape analysis using medial surfaces. *Neuroimage*, 25:1077–89, 2005.
- H. Breu, J. Gil, D. Kirkpatrick, e M. Werman. Linear time euclidean distance transform algorithms. *IEEE Trans. on PAMI*, 17:529–533, 1995.
- L. Calabi e W. E. Hartnett. Shape recognition prairie fires, convex deficiencies and skeletons. *American Mathematical Monthly*, 75(4), 1968.
- D. Cœurjolly. d-Dimensional reverse Euclidean distance transformation and Euclidean medial axis extraction in optimal time. In *DGCI*, volume 2886 of *LNCS*, pages 327–337. Springer Verlag, 2003.
- M. Couprie. Note on fifteen 2d parallel thinning algorithms. Technical Report IGM 2006-01, Institut Gaspard Monge, 2006. URL <http://www-igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2006/01.pdf>.
- M. Couprie, D. Cœurjolly, e R. Zrour. Discrete bisector function and Euclidean skeleton in 2d and 3d. *Image and Vision Computing*, 2006a. In Press.
- M. Couprie, A. V. Saúde, e G. Bertrand. Euclidean homotopic skeleton based on critical kernels. In *SIBGRAPI*, pages 307–314. IEEE CS press, 2006b. doi: 10.1109/SIBGRAPI.2006.16.
- M. Couprie, A. V. Saúde, e G. Bertrand. Euclidean homotopic skeleton in 2d and 3d based on critical kernels. *Submitted to IEEE Trans. PAMI*, 2007.

- O. Cuisenaire. *Distance transformations: fast algorithms and applications to medical image processing*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, October 1999.
- O. Cuisenaire e B. Macq. Fast euclidean distance transformation by propagation using multiple neighborhoods. *Computer Vision and Image Understanding*, 76(2):163–172, November 1999. doi: 10.1006/cviu.1999.0783. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WCX-45GWB7F-1F/2/ebfbfb3%71780744f5c94553fbelb209f>.
- P. E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- X. A. Daragon. *Surfaces discrètes et frontières d’objets dans les ordres*. PhD thesis, Université de Marne-la-Vallée, October 2005.
- E. R. Davies e A. P. N. Plummer. Thinning algorithms: a critique and a new methodology. *Pattern Recognition*, 14:53–63, 1981.
- A. F. de Souza. Esqueletos 8-isotrópicos. Master’s thesis, INPE, Brazil, February 2002.
- A. F. de Souza. *Expansão por dilatação e por erosão visando a extração de esqueletos e contornos em imagens digitais*. PhD thesis, INPE, Brazil, 2005.
- H. Eggers. Two fast euclidean distance transformations in \mathbb{Z}^2 based on sufficient propagation. *Computer Vision and Image Understanding*, 69(1):106–116, January 1998. doi: 10.1006/cviu.1997.0596.
- A. X. Falcão, J. Stolfi, e R. A. Lotufo. The Image Foresting Transform: Theory, algorithms and applications. *IEEE Trans. on PAMI*, 26(1):19–29, January 2004.
- P. Giblin. *Graphs, surfaces and homology*. Chapman and Hall, 1981.
- G. M. Hardy e E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 5th edition, 1978.
- T. Hirata. A unified linear-time algorithm for computing distance maps. *Information Processing Letters*, 58(3):129–133, 1996.

- C. T. Huang e O. R. Mitchell. A Euclidean distance transform using grayscale morphology decomposition. *IEEE Trans. on PAMI*, 16(4):443–448, April 1994. doi: 10.1109/34.277600.
- E. D. Khalimsky. On topologies of generalized segments. *Soviet Mat. Doklady*, 10:1508–1511, 1969.
- E. D. Khalimsky, R. Kopperman, e P. R. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36:1–17, 1990.
- M. N. Kolountzakis e K. N. Kutulakos. Fast computation of the euclidian distance maps for binary images. *Information Processing Letters*, 43(4):181–184, September 1992.
- T. Y. Kong, R. Kopperman, e P. R. Meyer. A topological approach to digital topology. *American Mathematical Monthly*, 38:901–917, 1991.
- V. A. Kovalevsky. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 46:141–161, 1989.
- C. Lantuéjoul. *La squelettisation et son application aux mesures topologiques des mosaïques polycristallines*. PhD thesis, École Nationale de Mines de Paris, France, 1978.
- R. A. Lotufo e F. A. Zampiroli. Fast multidimensional parallel Euclidean distance transform. In *SIBGRAPI*, Florianópolis - SC - Brazil, October 2001. IEEE CS Press.
- C. R. Maurer, R. Qi, e V. Raghavan. A linear time algorithm to compute exact euclidean distance transforms of binary images in arbitrary dimensions. *IEEE Trans. on PAMI*, 25(2):265–270, 2003.
- A. Meijster, J. B. T. M. Roerdink, e W. H. Hesselink. A general algorithm for computing distance transforms in linear time. In L. Vincent J. Goutsias e D.S. Bloemberg, editors, *5th Mathematical morphology and its applications to image and signal processing*, volume 18 of *Computational Imaging and Vision*, pages 331–340. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- F. Meyer. *Cytologie quantitative et morphologie mathématique*. PhD thesis, École Nationale de Mines de Paris, France, 1979.

- F. Meyer. Digital Euclidean skeletons. In *Visual Communications and Image Processing*, volume 1360, pages 251–262, Lausanne, 1990. SPIE.
- U. Montanari. A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance. *J. ACM*, 15(4):600–624, 1968. ISSN 0004-5411. doi: 10.1145/321479.321486.
- C. Pudney. Distance-ordered homotopic thinning: a skeletonization algorithm for 3D digital images. *Computer Vision and Image Understanding*, 72(3):404–413, 1998.
- I. Ragnelmalm. *Generation of Euclidean distance maps*. PhD thesis, Linköping Studies in Science and Technology, Linköping, Sweden, 1990. No. 206.
- E. Rémy e E. Thiel. Medial axis for chamfer distances: computing look-up tables and neighbourhoods in 2d or 3d. *Pattern Recognition Letters*, 23(6):649–661, April 2002. doi: 10.1016/S0167-8655(01)00141-6.
- E. Rémy e E. Thiel. Look-up tables for medial axis on squared Euclidean distance transform. In *DGCI*, volume 2886 of *LNCIS*, pages 224–235. Springer Verlag, 2003.
- E. Rémy e E. Thiel. Exact medial axis with Euclidean distance. *Image and Vision Computing*, 23(2):167–175, 2005.
- C. Ronse. Minimal test patterns for connectivity preservation in parallel thinning algorithms for binary digital images. *Discrete Applied Mathematics*, 21(1):67–79, 1988. FILE=ronse1988.pdf.
- A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *Journal of the ACM*, 17:146–160, 1970.
- A. Rosenfeld e J.L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of the ACM*, 13:471–494, 1966.
- D. Rutovitz. Pattern recognition. *Journal of the Royal Statistical Society*, 129: 504–530, 1966.
- T. Saito e J. I. Toriwaki. New algorithms for Euclidean distance transformation of an n -dimensional digitized picture with applications. *Pattern Recognition*, 27: 1551–1565, 1994a.

- T. Saito e J. I. Toriwaki. Reverse distance transformation and skeletons based upon the Euclidean metric for n -dimensional digital pictures. *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E77-D(4):1005–1016, Sep 1994b.
- A. V. Saúde, M. Couprie, e R. A. Lotufo. Exact Euclidean medial axis in higher resolution. Technical Report IGM2006-5, Institut Gaspard-Monge, Université de Marne-la-Vallée, 2006a. URL <http://www-igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2006/05.pdf>.
- A. V. Saúde, M. Couprie, e R. A. Lotufo. Exact Euclidean medial axis in higher resolution. In A. Kuba, K. Palágyi, e L.G. Nyúl, editors, *DGCI*, volume 4245 of *LNCS*, pages 605–616. Springer Verlag, Oct 2006b. doi: 10.1007/11907350_51.
- A. V. Saúde, M. Couprie, e R. A. Lotufo. Discrete 2d and 3d Euclidean medial axis in higher resolution. *Submitted to Image and Vision Computing*, 2007.
- F. Y. Shih e C. C. Pu. A skeletonization algorithm by maxima tracking on Euclidean distance transform. *Pattern Recognition*, 28(3):331–341, 1995.
- H. Talbot. *Analyse Morphologiques de Fibres Minérales d'Isolation*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de Mines de Paris, France, October 1993.
- H. Talbot e L. Vincent. Euclidean skeletons and conditional bisectors. In *Visual Communications and Image Processing*, volume 1818, pages 862–876. SPIE, 1992.
- E. Thiel e A. Montanvert. Chamfer masks: discrete distance functions, geometrical properties and optimization. In *11th ICPR*, volume 3, pages 244–247, 1992.
- L. Vincent. Efficient computation of various types of skeletons. In *V Medical Imaging*, volume 1445, pages 297–311. SPIE, 1991.
- H. Yamada. Complete Euclidean distance transformation by parallel operation. In *7th ICPR*, pages 69–71, Montreal, 1984.
- S. Yokoi, J. Toriwaki, e T. Fukumura. On generalized distance transformation of digitized pictures. *IEEE Trans. on PAMI*, 3(4):424–443, 1981.